۳- تحقیق نمائید ؟

(a) $\log \sin 53^\circ 18' = 9,90405 - 10$

(b) $\log \cos 18^\circ 17' = 9,97750 - 10$

(c) $\log \tan 42^\circ 47' = 9,996636 - 10$

(d) $\log \cot 68^\circ 14' = 9,60130 - 10$

(e) $\log \sin 71^\circ 9,6' = 9,97608 - 10$

(f) $\log \cos 56^\circ 44,4' = 9,73913 - 10$

(g) $\log \tan 67^\circ 0,3' = 0,37226$

(h) $\log \cot 76^\circ 9,3' = 9,39174 - 10$

(i) $\log \sin 72^\circ 15,4' = 9,97884 - 10$

۴- تحقیق نمائید ؟

(a) $\log \sin A = 9,28705 - 10$ $A = 11^\circ\ 10,0'$

(b) $\log \cos A = 9,48881 - 10$ $A = 72^\circ\ 3,0'$

(c) $\log \tan A = 9,82325 - 10$ $A = 33^\circ\ 39,0'$

(d) $\log \cot A = 9,91765 - 10$ $A = 50^\circ\ 24,0'$

(e) $\log \sin A = 9,53928 - 10$ $A = 20^\circ\ 15,0'$

(f) $\log \cos A = 9,89900 - 10$ $A = 37\ \ 34,8$

(g) $\log \tan A = 9,53042 - 10$ $A = 18^\circ\ 44,1'$

(h) $\log \cot A = 0,18960$ $A = 32^\circ\ 52,4'$

(i) $\log \sin 72^\circ 15,4' = 9,97884 - 10$

(j) $\log \cos 20^\circ 9,20' = 9,97256 - 10$

(k) $\log \tan 84^\circ 47,1' = 1,03967$

فصل پنجم

حل مثلث ها

منظور از حل یک مثلث تعین و دریافت 6 عنصر یک مثلث بصورت دقیق میباشد . برای تعین عناصر مجهول یک مثلث از عناصر معلوم آن که به قسم فرضیه داده میشود استفاده نموده مثلث را حل مینمائیم. برای اینکه محاسبه دقیق صورت بگیرد و عناصر مجهول رابصورت واقعی آن بدست آورده بتوانیم ازجدول لوگاریتم مثلثاتی که پیش از پیش تا 5 رقم اعشاری محاسبه شده است استفاده می نمائیم . درین بحث مثلث ها ی قایم الزاویه و مثلث ها ی کیفی را حل مینمائیم .

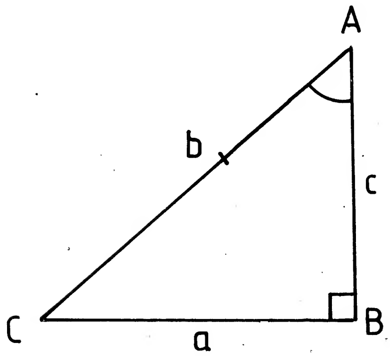
۱ ـ مثلث ها ی قایم الزاویه :

درمثلث قایم الزاویه یک عنصر آن که زاویه قایمه است معلوم میباشد . می باید دو عنصر دیگر آن که اقلاً یکی آن یک ضلع باشد به قسم فرضیه داده شده باشد .

a ـ مثلث قایم الزاویه راحل مینمائیم که وتر و یک زاویهٔ حاده آن معلوم باشد .

فرضیه : در مثلث قایم الزاویه ABC زاویه A و وتر b آن معلوم است .

مطلوب : تعین زاویه C ، ضلع a وضلع c .



حل : $\hat{C} = 90^\circ - A$

همچنان : $\sin A = \frac{a}{b}$

$$\log \sin A = \log a - \log b$$

$$\log a = \log \sin A + \log b$$

طرف راست معادله فوق معلوم است . بعد از محاسبه لوگاریتمی طرف راست آن ، طرف چپ آن معلوم میشود .

و طول ضلع a بدست میآید .

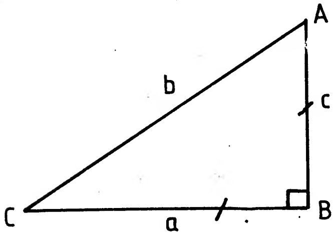
$$c^2 = b^2 - a^2 , \quad c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{(b+a)(b-a)}$$

$$c = \frac{1}{2} \text{Log}(b+a) + \frac{1}{2} \text{Log}(b-a)$$

b ـ درمثلث قایم الزاویه ABC که دو ضلع قایم آن معلوم است ، مثلث راحل میکنیم :

فرضیه : درمثلث قایم الزاویه ABC ضلع قایم a ، ضلع قایم b وهم زاویه قایمه B معلوم است .

مطلوب : طول وتر b ، زاویه A وزاویه C را دریافت مینمائیم :



حل : نظر به قضیه پیتاگور میتوانیم بنویسیم :

$$b^2 = a^2 + c^2 , \quad b = \sqrt{a^2 + c^2}$$

ازطرف دیگر : $\tan A = \frac{a}{c}$

$$\text{Log} \tan A = \text{Log} \frac{a}{c}$$

$$\text{Log} \tan A = \text{Log}\, a - \text{Log}\, c$$

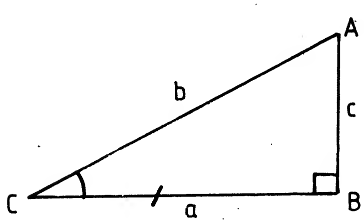
چون دوضلع قایم معلوم است بناءً طرف چپ معادله بالا معلوم است و بالنتیجه زاویه A بدست میآید.

همچنان $\hat{C} = 90^\circ - \hat{A}$

c ـ دریک مثلث قایم الزاویه یک ضلع قایم ویک زاویه حاده آن معلوم است مثلث راحل میکنیم :

فرضیه : درمثلث قایم الزاویه ABC زاویه حادهٔ C وضلع قایم a داده شده است .

مطلوب : عناصر مجهول این مثلث راکه عبارت اززاویه A ، ضلع قایم C ووتر b میباشد دریافت مینمائیم



حل : $A = 90^\circ - C$

همچنان : $\cos C = \frac{a}{b}$

$$b = \frac{a}{\cos C}$$

$$\text{Log}\, b = \text{Log}\, a - \text{Log} \cos c$$

چون طرف راست معادله معلوم است بناءً Log b معلوم شده بعدازمحاسبه لوگاریتمی قیمت b را به دست میآوریم.

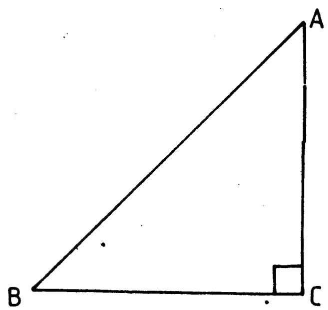
همچنان :
$$\tan C = \frac{c}{a}$$

$$c = a \tan C$$

$$\text{Log}\, c = \text{Log}\, a + \text{Log} \tan C$$

طرف راست معادله معلوم است از اینجا قیمت c بدست میآید.

d ـ مثلث قایم الزاویه را حل می نمائیم که وترو یک ضلع قایم آن معلوم باشد.



فرضیه : درمثلث قایم الزاویه ABC طول وتر b وطول یک ضلع قایم آن c داده شده است.

مطلوب : طول ضلع a ، زاویهٔ B و زاویه C رادریافت مینمائیم.

حل :
$$b^2 = a^2 + c^2$$

$$a^2 = b^2 - c^2 , \quad a = \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{(b+c)(b-c)}$$

$$\text{Log}\, a = \frac{1}{2}\text{Log}\,(b+c) + \frac{1}{2}\text{Log}\,(b-c)$$

طرف راست معادله معلوم است. لهذا Loga معلوم بوده وازاینجا طول a رابدست میآوریم.

همچنان :
$$\sin C = \frac{c}{b}$$

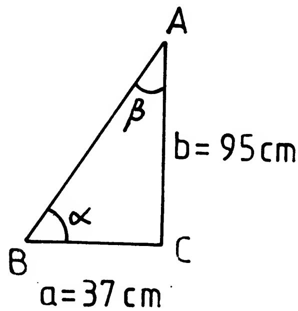
$$\text{Log} \sin C = \text{Log} \frac{c}{b}$$

$$\text{Log} \sin C = \text{Log}\, c - \text{Log}\, b$$

چون طرف راست معادله معلوم است بناءً Log sin C معلوم شده و از اینجا اندازه زاویه C بدست میآید.

مثال اول: دریک مثلث قایم الزاویه ABC که رأس C آن قایم است $a = 95\ cm$ و $b = 37\ cm$ داده شده است مثلث را حل کنید؟

حل:



$$\tan \propto = \frac{95}{37}$$

$$\text{Log} \tan \propto = \text{Log } 95 - \text{Log } 37$$

$$\text{Log} \tan \propto = 1,9777 - 1,5682$$

$$\text{Log} \tan \propto = 0,4095$$

$$\text{Log} \tan 68^\circ 40' = 0,4083$$

$$\text{Log} \tan 68^\circ 50' = 0,4121$$

فرق برای $38 = 10'$

فرق زاویه	فرق نسبت های مثلثاتی
10	38
x	12

$$x = \frac{10 \cdot \overset{6}{\cancel{12}}}{\underset{19}{\cancel{38}}} = \frac{60}{19} = 3'\ 9''$$

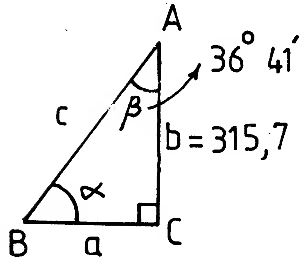
$$\propto = 68^\circ\ 43'\ 9''$$

$$\beta = 90^\circ - 68^\circ\ 43'\ 9'' = 21^\circ\ 16'\ 51''$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad , \quad c = \sqrt{95^2 + 372^2} \simeq 102$$

مثال دوم: در مثلث قایم الزاویه ABC، $\beta = 36^\circ\ 41'$, $b = 315,7cm$ داده شده است مثلث را حل کنید؟

حل :



$$\cos\beta = \frac{b}{c} = \cos 36^\circ 41'$$

$$c = \frac{b}{\cos 36^\circ 41'}$$

$$\text{Log}\, c = \text{Log}\, b - \text{Log}\cos 36^\circ 41'$$

$$\text{Log}\, c = \text{Log}\ 315,7 - \text{Log}\cos 36^\circ 41'$$

$$\text{Log}\, c = 2,49927 - (9,90415 - 10)$$

$$\text{Log}\, c = 2,49927 - 9,90415 + 10$$

$$\text{Log}\, c = 2,59512$$

$$c = 393,7\ \text{cm}$$

همچنان :

$$\tan 36^\circ 41' = \frac{a}{b}$$

$$a = 315,7\ \tan 36^\circ 41'$$

$$\text{Log}\, a = \text{Log}\ 315,7 + \text{Log}\tan 36^\circ 41'$$

$$\text{Log}\, a = 2,49927 + 9,87211 - 10$$

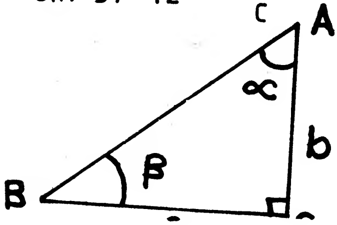
$$\text{Log}\, a = 12,37138 - 10$$

$$\text{Log}\, a = 2,37138 \quad , \quad a = 235,2$$

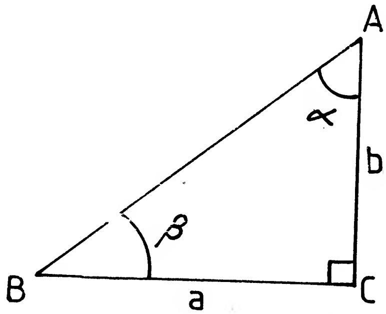
$$\alpha = 90 - 36^\circ 41' = 53^\circ 19'$$

مثال سوم : درمثلث قائم الزاویه ABC یک ضلع $c = 26\ \text{cm}$ و $\hat{\alpha} = 37^\circ 42'$ داده شده است. مثلث را حل کنید ؟

$$\sin 37^\circ 42' = \frac{a}{c} \quad , \quad \sin 37^\circ 42' = \frac{a}{26}$$



$$a = 26 \sin 37^\circ 42'$$



$\mathrm{Log}\, a = \mathrm{Log}\ 26 \sin 37^\circ\ 42'$

$\mathrm{Log}\, a = \mathrm{Log}\ 26 + \mathrm{Log} \sin 37^\circ\ 42'$

$\mathrm{Log}\, a = 1,41497 + 9,78642 - 10$

$\mathrm{Log}\, a = 1,20139$

$a = 15,9$

اکنون طول b را دریافت میکنیم :

$\cos 37^\circ\ 42' = \frac{b}{c}$, $b = c \cos 37^\circ\ 42'$

$\mathrm{Log}\, b = \mathrm{Log}\ c \cos 37^\circ\ 42'$

$\mathrm{Log}\, b = \mathrm{Log}\ c + \mathrm{Log} \cos 37^\circ\ 42'$

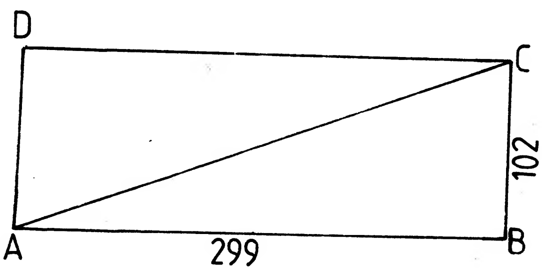
$\mathrm{Log}\, b = \mathrm{Log}\ 26 + \mathrm{Log} \cos 37^\circ\ 42'$

$\mathrm{Log}\, b = 1,41497 + 9,89830 - 10$

$\mathrm{Log}\, b = 1,31327$, $b = 20,57$

$\hat{\beta} = 90^\circ - 37^\circ\ 42' = 52^\circ\ 18'$, $\hat{\beta} = 52^\circ\ 18'$

مثال چهارم : طول وعرض یک مستطیل بالترتیب 296 و 102 متر است. طول قطر واندازه زاویهٔ ای راکه قطر با طول مستطیل می سازد دریافت نمائید؟



حل : فرضاً ABCD مستطیل مذکور باشد.

که طول AB = 299 , BC = 102 متر باشد.

$\tan \alpha = \frac{102}{299}$

$\mathrm{Log} \tan \alpha = \mathrm{Log} \frac{102}{299} = \mathrm{Log}\ 102 - \mathrm{Log}\ 299$

$\mathrm{Log} \tan \alpha = 2,00860 - 2,47567 = -\ ,46707$

$$\text{Log} \tan \alpha = 10 - ,46707 - 10 = 9,53293 - 10$$

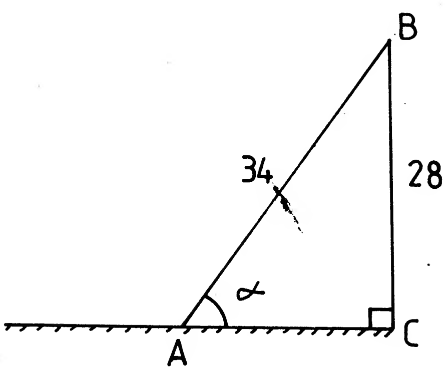
$$\therefore \alpha \approx 18^\circ\ 50'\ 11''$$

$$\overline{AC}^2 = (299)^2 + (102)^2 \quad , \quad \overline{AC} = \sqrt{99805}$$

$$\overline{AC} = 315,9$$

مثال پنجم : یک زینه که 34 متر طول دارد ، به دیواری که 28 متر ارتفاع دارد تکیه داده شده است میلان زینه را دریافت کنید ؟

حل :



$$\sin \alpha = \frac{28}{34}$$

$$\text{Log} \sin \alpha = \text{Log}\, 28 - \text{Log}\, 34$$

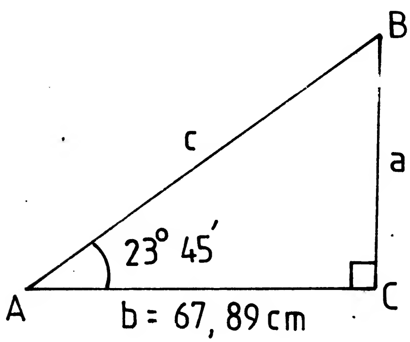
$$= 1,44716 - 1,53148$$

$$= -0,08432$$

$$= -0,08432 + 10 - 10$$

$$\text{Log} \sin \alpha = 9,91568 - 10 \ , \ \alpha = 55^\circ 33'$$

مثال ششم : در یک مثلث قایم الزاویه $\hat{A} = 23^\circ\ 45'$ ، $b = 67,89\text{cm}$ میباشد مثلث را حل کنید ؟



برای دریافت a :

$$\hat{B} = 90^\circ - 23^\circ\ 45' = 66^\circ\ 55'$$

$$\tan 23^\circ\ 45' = \frac{a}{67,89}$$

$$\therefore a = 67,89 \cdot \tan 23^\circ 45'$$

$$\text{Log}\, a = \text{Log}\, 67,89 + \text{Log} \tan 23^\circ 45'$$

$$\text{Log}\, 67,89 = 1,83181$$

$$\text{Log} \tan 23^\circ 45' = 9,64346 - 10$$

$$\text{Log}\, a = 1,83181 + 9,64346 - 10$$

$$\text{Log}\, a = 1,47527$$

$$a = 29,87$$

دریافت ضلع c :

$$\cos 23^\circ 45 = \frac{67,89}{c}$$

$$c = \frac{67,89}{\cos 23^\circ 45'}$$

$$\text{Log}\, c = \text{Log}\, 67,89 - \text{Log} \cos 23^\circ 45'$$

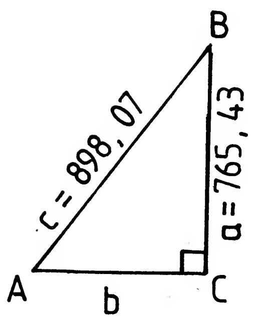
$$\text{Log}\, c = 1,83181 - (9,96157 - 10) = 1,83181 - 9,96157 + 10$$

$$\text{Log}\, c = 1,87024 \quad , \quad c = 74,17$$

مثال هفتم : مثلث قایم الزاویه ABC را حل کنید درصورتیکه $a = 765,43$ و $c = 898,07$ باشد.

دریافت $\hat{A}$:

$$\sin A = \frac{765,43}{898,07}$$



$$\sin A = \frac{765,43}{898,07}$$

$$765,43 = \sin A \cdot 898,07$$

$$\text{Log}\, 765,43 = \text{Log} \sin A + \text{Log}\, 898,07$$

$$\text{Log} \sin A = \text{Log}\, 765,43 - \text{Log}\, 898,07$$

چون : $\text{Log}\, 898,07 = 2,95331$

و $\text{Log } 765,43 = 2,88391 - 2,95331$

پس : $\text{Log} \sin A = 2,88391$

$\text{Log} \sin A = 9,93060 - 10$

$\hat{A} = 58^\circ \quad 27,9'$

$\hat{B} = 90^\circ - 58^\circ \; 27,9' = 31^\circ \quad 32,1'$

دریافت b :

$$\cos A = \frac{b}{898,07}$$

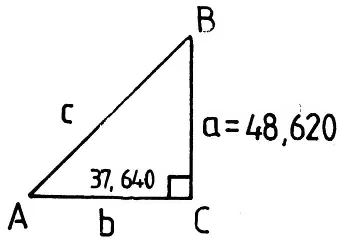
$b = 898,07 \times \cos A \quad , \quad \text{Log } b = \text{Log } 898,07 + \text{Log} \cos A$

$\text{Log} \cos A = 9,71582 - 10 \quad , \quad \text{Log } 898,07 = 2,95331$

$\text{Log } b = 12,67183 - 10$

$b = 469,71$

مثال هشتم : مثلث قایم الزاویه ABC را که $a = 48,620$, $b = 37,640$ داده شده است حل و امتحان کنید ؟



حل :

$\tan A = \frac{a}{b}$

$\text{Log} \tan A = \text{Log } a - \text{Log } b$

$\text{Log} \tan A = 1,68681 - 1,57565$

$\text{Log} \tan A = 0,11116$

$\hat{A} = 52^\circ \quad 15,2'$

$\hat{B} = 37^\circ \quad 44,8'$

$\sin A = \frac{a}{c} \quad , \quad c = \frac{a}{\sin A}$

مثال چهارم: تحقیق نمائید $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2A-\sin^2B$

حل:

$$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$$

$$=\sin^2A\cos^2B-\cos^2A\sin^2B$$

$$=\sin^2A(1-\sin^2B)-\sin^2B(1-\sin^2A)$$

$$=\sin^2A-\sin^2A\sin^2B-\sin^2B+\sin^2B\sin^2A$$

$$=\sin^2A-\sin^2B$$

مثال پنجم: قیمت افاده مثلثاتی ذیل را دریافت مینمائیم:

$$\sin 17^\circ\cdot\cos 43^\circ+\cos 17^\circ\cdot\sin 43^\circ=\ ?$$

حل:

$$\sin 17^\circ\cos 43^\circ+\cos 17^\circ\cdot\sin 43^\circ=\sin(17^\circ+43^\circ)$$

$$=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

تمرینات:

۱- قیمت افاده های مقابل را دریافت نمائید. $\sin 25^\circ\cos 35^\circ+\cos 25^\circ\sin 35^\circ=\ ?$

۲- $\cos 23^\circ\cos 22^\circ-\sin 23^\circ\sin 22^\circ=\ ?$

۳- تحقیق نمائید.

$$\tan 55^\circ=\frac{1+\tan 10^\circ}{1-\tan 10^\circ}$$

۴- محاسبه نمائید.

$$\frac{\tan 54^\circ-\tan 24^\circ}{1+\tan 54^\circ\tan 24^\circ}=\ ?$$

۵- ساده سازید $\cos 20^\circ\cdot\cos 160^\circ-\sin 20^\circ\cdot\sin 160^\circ$

۶- هرگاه $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ ، $\cos\beta=\frac{8}{17}$ (درکوادرانت اول) باشد، نسبت های مثلثاتی $\alpha+\beta$ را دریافت نمائید؟

$$\log a = 1,68681$$

$$\log \sin A = 9,89603 - 10$$

$$\log c = 1,78878 \quad , \quad c = 61,487$$

تمرینات :

۱ - یک سرک بعد از هر 6 متر یک متر بلند می شود . میلان آنرا حساب کنید ؟

۲ - دو ضلع قایم یک مثلث قایم الزاویه بالترتیب 10 cm و 20 cm است مثلث را حل کنید؟

۳ - میلان یک سرک مایل با افق زاویه 10° را ساخته است. معلوم کنید که بعد از 100 متر چقدر ارتفاع دارد .

۴ - در یک مثلث قایم الزاویه $\hat{B} = 72^\circ\ 41'$ ، $a = 20,14$ میباشد. مثلث را حل کنید؟

۵ - در یک مثلث قایم الزاویه $\hat{A} = 49^\circ\ 32'$ ، $c = 410,5$ میباشد مثلث را حل کنید؟

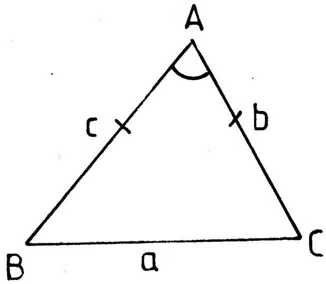
۶ - قاعدهٔ یک مثلث متساوی الساقین را دریافت کنید که زاویه رأس آن $48^\circ\ 27,4'$ و طول ساق آن 168,14 cm باشد . جواب 138

۷ - در یک مثلث قایم الزاویه $a = 25,72$ و $A = 36^\circ\ 20'$ مثلث را حل کنید ؟

۸ - در یک مثلث قایم الزاویه $c = 44,26$ و $A = 56^\circ\ 14'$ است مثلث را حل کنید؟

حل مثلث های کیفی :

درین مبحث مثلث های حادة الزاویه ، منفرج الزاویه را حل مینمائیم . مقصد از حل این مثلث ها دریافت عناصر مجهول این مثلث ها میباشد . قسمی که دوضلع و زاویه بین آن دوضلع ، یک ضلع و زوایای مجاور این ضلع ، سه ضلع این مثلث به قسم فرضیه داده شده . سه عنصر دیگر این مثلث را دقیقاً دریافت مینمائیم .



I - حل یک مثلثی که دوضلع و زاویه بین آن دوضلع داده شده باشد :

درمثلث ABC اضلاع b و c و زاویهٔ بین این دوضلع $\hat{A}$ داده شده است .

عناصر مجهول زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ وضلع a را دریافت مینمائیم :

از فارمول $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$ ، (B − C) را بدست میآوریم .

ازطرفی $\hat{B}+\hat{C}=180^\circ-\hat{A}$ میباشد ازدورابطهٔ فوق $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را بدست میآوریم .

ضلع a را ازین رابطه بدست میآوریم :

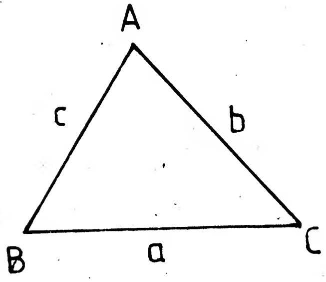
$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$$

(b ، c و A معلوم است)

II - حل مثلثی که یک ضلع و دو زاویه مجاور آن ضلع معلوم باشد :

حل :

مجهول	معلوم
b , c , A	a , $\hat{B}$, $\hat{C}$



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}\quad,\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

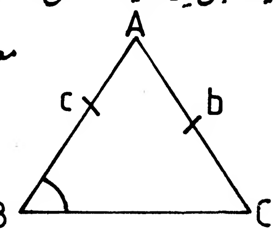
$$\text{Log}\, b = \text{Log}\, a + \text{Log}\sin B - \text{Log}\sin A$$

$$\text{Log}\, c = \text{Log}\, a + \text{Log}\sin C - \text{Log}\sin A$$

در روابط بالا طرف راست هر دو رابطه معلوم است . بناءً میتوانیم طرف چپ معادله یعنی قیمت های b و c را بدست آریم :

III - حل مثلثی که دوضلع ویک زاویه مقابل یکی ازین دوضلع معلوم باشد :

معلوم: $b , c , \hat{B}$



مجهول: $a , \hat{A} , \hat{C}$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

حل :

$\sin C = \dfrac{c \sin B}{b}$ درصورت موجودیت شرط $\dfrac{c \sin B}{b} \leqslant 1$

قابل حل است ویا $c \sin B \leqslant b$ زاویه B یک زاویه معلوم مثلث ABC میباشد . ومیتوانیم حل کنیم :

$$\text{Log}\sin C = \text{Log}\, c + \text{Log}\sin B - \text{Log}\, b$$

طرف راست معادله معلوم است . بعداز محاسبه لوگاریتمی $\hat{C}$ را بدست میآوریم :

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C})$$

اکنون a را دریافت مینمائیم :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B}$$

$$\text{Log}\, a = \text{Log}\, b + \text{Log}\sin A - \text{Log}\sin B$$

بعداز محاسبه لوگاریتمی a بدست میآید .

مثال اول : $\hat{B} = 30^\circ$ ، $b = 5$ ، $c = 14$ ، مثلث را حل کنید ؟

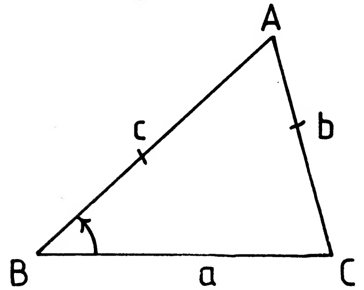
حل :
$$C \sin B = 14 \sin 30^\circ = 14 \cdot \frac{1}{2} = 7$$

در اینجا $c \sin B > b$ میباشد بناءً امکان حل را ندارد .

مثال دوم : $B = 60^\circ$ ، $b = 9$ و $C = 6\sqrt{3}$ امکان حل مثلث را دریافت کنید .

$$c \sin B = 6\sqrt{3} \sin 60^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9 \quad ; \quad b = c \sin B \quad ; \quad 9 = 9$$

امکان حل را دارد .

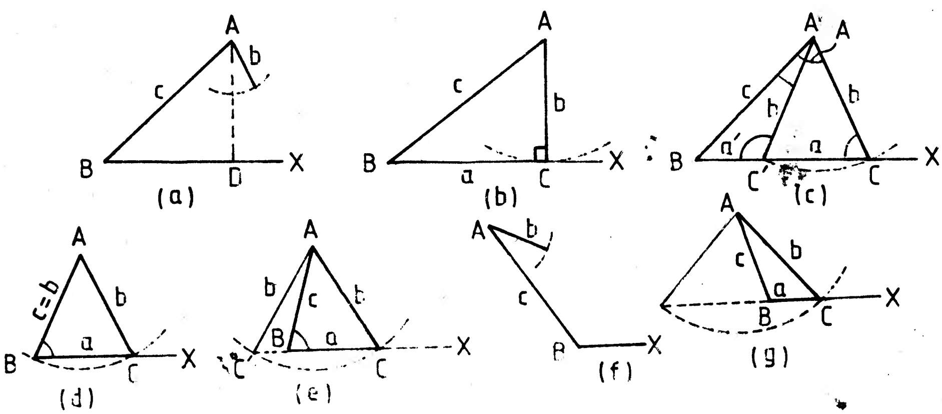


فرضاً b ، c و $\hat{B}$ عناصر داده شده مثلث باشند :

۱ - زاویه داده شده $\hat{B}$ وضلع $\overline{BA} = C$ را ترسیم مینمائیم بمرکز A و به شعاع b (ضلع مقابل زاویه داده شده) یک قوس رسم میکنیم .

هرگاه زاویه B حاده بوده و شرط $b < AD = c \sin B$ موجود باشد ، قوس مرسومه ضلع BX را قطع نمیکند و مثلث تشکیل نمی شود حل ندارد مانند شکل a .

۲ - هرگاه $b = AD$ باشد قوس مماس به BX میباشد و یک مثلث قایم الزاویه ABC که رأس C قایم میباشد . تشکیل میشود و یک حل دارد مانند شکل b .



۳ - هرگاه $b > AD$ باشد و $b < c$ باشد قوس مرسومه مستقیم BX را در دو نقطه C و C′ به یک طرف نقطه B قطع میکنند در نتیجه دو مثلث، یکی مثلث حادة الزاویه ABC و دیگری مثلث منفرج الزاویه ABC′ در حالیکه $\hat{C'} = 180° - \hat{C}$ میباشد بدست میآید. و دو حل معین دارد مانند شکل c .

۴ - هرگاه $b > AD$ و $b = c$ باشد قوس مرسومه BX را در نقاط B و C قطع میکند که یک مثلث متساوی الساقین تشکیل و تعین میشود. یک حل دارد مانند شکل d .

۵ - هرگاه $b > c$ باشد قوس مرسومه BX را در نقطه C وامتداد BX را در نقطه C′ قطع میکند. لهذا مثلث ABC′ زاویه داده شده مفروضه B را دارا نمیباشد تنها یک حل دارد که عبارت از مثلث ABC است مانند شکل e .

هرگاه زاویه داده شده منفرجه باشد

۶ - درصورتیکه $b < c$ و $b = c$ باشد مثلث تشکیل نمیشود. حل ندارد. مانند شکل f .

۷ - هرگاه $b > c$ باشد تنها یک مثلث تشکیل میشود و یک حل دارد مانند شکل g .

IV : حل مثلثی که سه ضلع آن معلوم باشد :

سه ضلع یک مثلث a ، b و c داده شده است ، سه زاویه آن را دریافت می نمائیم :

توسط فارمول های ذیل با استفاده از لوگاریتم سه زاویه این مثلث را دریافت می نمائیم :

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{bc}}$$

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(P-a)(P-c)}{ac}}$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(P-a)(P-b)}{ab}}$$

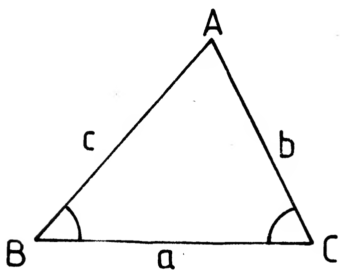
$$\log\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left\{\log(P-b)+\log(P-c)-\log b-\log c\right\}$$

چون طرف راست معادله معلوم است بناءً $\log\sin\frac{A}{2}$ معلوم ومعین شده ازآن میتوانیم زاویه A را بدست آریم .

V : هرگاه سه زاویهٔ یک مثلث معلوم باشد ، سه زاویهٔ یک مثلث راتعین نموده نمیتواند . توسط زاویه داده شده میتوانیم چندین مثلث مشابه راکه ازهم فرق دارند ترسیم نمائیم . بناءً اگر سه زاویهٔ یک مثلث معلوم باشد مثلث راحل وتعین نموده نمیتوانیم . ازسه زاویه بی نهایت مثلث ها بدست می آید .

مثال اول : در یک مثلث ABC ، $a = 18,2$ ، $\hat{B} = 62^\circ$ ، $\hat{C} = 48^\circ$

(دوزاویه وضلع بین آن دوزاویه داده شده است)



حل :

$$\hat{A} = 180^\circ - (48^\circ + 62^\circ)$$

$$\hat{A} = 180 - 110 = 70$$

اضلاع b و c راازرابطهٔ ذیل بدست میآوریم :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$$

$$\log b = \log a + \log\sin B - \log\sin A$$

$$\log b = \log 18,2 + \log\sin 62^\circ - \log\sin 70^\circ$$

$$= 1,26007 + (9,94593 - 10) - (9,97299 - 10)$$

$$= 1,26007 + 9,94593 - 10 - 9,97299 + 10$$

$$= 11,20600 - 9,97299$$

$=1,23301$ یا $b=17,1$

همچنان :

$$\frac{b}{\sin B} \quad \frac{c}{\sin C}$$

$$C = b\,\frac{\sin C}{\sin B}$$

$$\text{Log}\, C = \text{Log}\, b + \text{Log}\sin C - \text{Log}\sin B$$

$$= \text{Log}\, 17,1 + \text{Log}\sin 48^\circ - \text{Log}\sin 62^\circ$$

$$= 1,23301 + (9,87107 - 10) - (9,94593 - 10)$$

$$= 11,10408 - 9,94593$$

$= 1,15815$ یا $C = 14,4$ واحد طول

مثال دوم :

$\hat{C} = 40^\circ\ 16'$, $c = 141\ cm$, $b = 109\ cm$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad , \quad \sin\hat{B} = \frac{b}{c}\sin C$$

$$\text{Log}\sin\hat{B} = \text{Log}\, b + \text{Log}\sin C - \text{Log}\, c$$

$$= \text{Log}\, 109 - \text{Log}\, 141 + \text{Log}\sin 40^\circ\ 16'$$

$$= 2,03743 - 2,14922 + 9,81047 - 10$$

$$= 11,84790 - 2,14922 - 10$$

$$= 9,69868 - 10$$

$$\therefore \quad \hat{B} = 29^\circ\ 59' \qquad \hat{A} = 180 - (B + C)$$

$$= 180 - (29^\circ\ 59' + 40^\circ\ 16')$$

$$\hat{A} = 109^\circ\ 45'$$

همچنان :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \text{یا} \quad a = \frac{b \sin A}{\sin B}$$

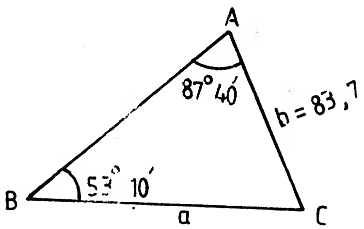
$$\log a = \log b + \log \sin A - \log \sin B$$

$$\log a = \log 109 + \log \sin 109^\circ 45' - \log \sin 29^\circ 59'$$

$$\log a = 2{,}03743 + 9{,}97367 - 10 - 9{,}69875$$

$$= 2{,}31235 \qquad a = 205{,}2\ cm$$

مثال سوم : در یک مثلث ABC $\hat{A} = 87^\circ 40'$, $\hat{B} = 53^\circ 10'$, $b = 83{,}7$



حل : در اینجا اولاً زاویه C را دریافت کنیم :

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})$$

$$\hat{C} = 180 - (87^\circ 40' + 53^\circ 10) = 39^\circ 10'$$

اکنون یک ضلع و دو زاویه مجاور این دو ضلع داده شده است . مثلث را حل مینمائیم

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \text{یا} \quad a = \frac{b \sin A}{\sin B}$$

$$a = \frac{\sin 87^\circ 40'}{\sin 53^\circ 10'} \cdot 83{,}7$$

$$\log a = \log \sin 87^\circ 40' + \log 83{,}7 - \log \sin 53^\circ 10'$$

$$= 9{,}99964 - 10 + 1{,}92273 - (9{,}90330 - 10)$$

$$11{,}92237 - 9{,}90330$$

$$\log a = 2{,}01907 \quad , \quad a = 104{,}5$$

اکنون

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B}$$

$$c = \frac{83,7 \ \sin 39^\circ 10'}{\sin \ 53^\circ \ 10'}$$

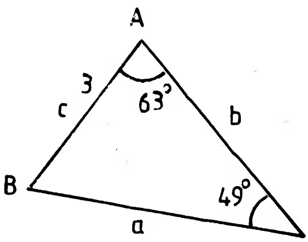
$$\text{Log } c = \text{Log } 83,7 + \text{Log } \sin 39^\circ 10' - \text{Log } \sin 53^\circ 10'$$

$$= 1,92273 + 9,80043 - 10 - (9,90330 - 10)$$

$$= 11,72316 - 9,90330$$

$$= 1,81986 \quad , \quad c = 66,0 \text{ cm}$$

مثال چهارم: $c = 3$ ، $\hat{C} = 49^\circ$ ، $\hat{A} = 63^\circ$ داده شده است مثلث را حل کنید ؟



حل :

$$\hat{B} = 180^\circ - (63^\circ + 49^\circ)$$

$$\hat{B} = 68^\circ$$

اکنون درین مثلث یک ضلع و دو زاویه مجاور این ضلع معلوم است مثلث را حل مینمائیم :

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \quad , \quad b = \frac{c \ \sin B}{\sin C}$$

$$b = \frac{3 \sin 68^\circ}{\sin 49}$$

$$\text{Log } b = \text{Log } 3 + \text{Log } \sin 68^\circ - \text{Log } \sin 49^\circ$$

$$= ,47712 + 9,96717 - 10 - (9,87778 - 10)$$

$$= 10,44429 - 9,87778$$

$= 0,56651$ یا $b = 3,69 \text{ cm}$

برای دریافت a ما داریم :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} \quad , \quad \text{Log}\, a = \text{Log}\, 3{,}69 + \text{Log} \sin 63^\circ - \text{Log} \sin 68^\circ$$

$$\text{Log}\, a = {,}56703 + \not{9}{,}94988 - \not{10} - \not{9}{,}96717 + \not{10}$$

$$\text{Log}\, a = {,}56703 + {,}94988 - {,}96717$$

$$\text{Log}\, a = 1{,}51691 - {,}96717 = {,}54974 \quad , \quad a = 3{,}54$$

مثال پنجم : $b = 1002 \quad , \quad \hat{C} = 76^\circ\, 03' \quad , \quad A = 48^\circ\, 59'$

مثلث مذکور را حل کنید ؟

حل : $\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C})$ یا $\hat{B} = 180^\circ - (48^\circ\, 59' + 76^\circ\, 03')$

$$\hat{B} = 54^\circ\, 58'$$

اکنون طول اضلاع را دریافت میکنیم :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B}$$

$$\text{Log}\, a = \text{Log}\, b + \text{Log} \sin A - \text{Log} \sin B$$

$$\text{Log}\, a = \text{Log}\, 1002 + \text{Log} \sin 48^\circ\, 59' - \text{Log} \sin 54^\circ\, 58'$$

$$= 3{,}00087 + 9{,}87767 - 10 - (9{,}91319 - 10)$$

$$= 12{,}87854 - 9{,}91319 = 2{,}96535$$

$$\text{Log}\, a = 2{,}96535 \quad , \quad a = 923{,}3$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

۷ - اثبات نمائید که :

$$\frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B} + \frac{\sin(B-C)}{\cos B \cos C} + \frac{\sin(C-A)}{\cos C \cos A} = 0$$

۸ - اثبات کنید که : $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ = \cos 105^\circ + \cos 15^\circ$

۹ - اثبات نمائید که : $\cos\alpha\cos(\gamma-\alpha) - \sin\alpha\sin(\gamma-\alpha) = \cos\gamma$

۱۰ - اثبات نمائید که :

$$\cos(45^\circ+A)\cos(45^\circ-B) + \sin(45^\circ+A)\cdot\sin(45^\circ-B) = \cos(45^\circ+B)$$

۱۱ - اثبات نمائید که :

$$\cos(45^\circ-B)\sin(45^\circ+A) - \cos(45^\circ+A)\sin(45^\circ-B) = \sin(A+B)$$

۱۲ - قیمت افادهٔ مثلثاتی ذیل را بنویسید درصورتیکه $\hat{\theta} = 10^\circ$ باشد .

$$\sin 4\theta \cos 5\theta + \sin 5\theta \cos 4\theta = ?$$

۱۳ - بسط بدهید ؟ $\sin(50^\circ - 5^\circ) = ?$

۱۴ - بسط بدهید ؟ $\cos(45^\circ - 15^\circ) = ?$

۱۵ - بسط بدهید وقیمت آنرا در دایرهٔ مثلثاتی دریافت نمائید . $\tan(45^\circ + 45^\circ) = ?$

به هر سوال چهار جواب داده شده است . بدور جواب صحیح خط گرد بگیرید ؟

(I) $\sin(\alpha+\beta) = ?$

a : $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, b : $\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta$

c : $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, d : $-\sin\beta\sin\alpha + \cos\alpha\cos\beta$

(II) $\cos(\alpha+\beta) = ?$

a : $\cos\alpha\sin\beta - \cos\beta\sin\alpha$, b : $\cos\beta\cos\alpha + \sin\alpha\sin\beta$

$$C = \frac{b \sin C}{\sin B}$$

$$\operatorname{Log} C = \operatorname{Log} b + \operatorname{Log} \sin C - \operatorname{Log} \sin B$$

$$= \operatorname{Log} 1002 + \operatorname{Log} \sin 76^\circ 3' - \operatorname{Log} \sin 54^\circ 58'$$

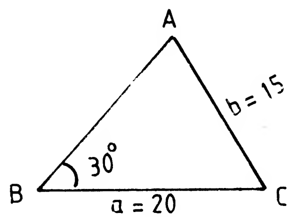
$$= 3{,}00087 + 9{,}98700 - 10 - (9{,}91319 - 10)$$

$$= 12{,}98787 - 9{,}91319$$

$$= 3{,}07468 \quad , \quad c = 1188$$

مطالعه مثلث های که دارای یک حل، دوحل و هیچ یک حل نمیداشته باشند.

مثال اول: امکان حل وتعداد حل های این مثلث را دریافت کنید؟



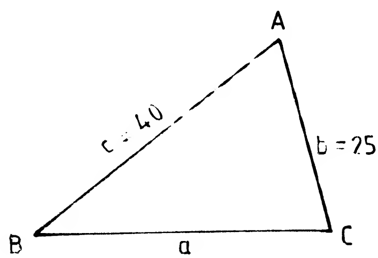
$\hat{B} = 30^\circ \quad , \quad b = 15 \quad , \quad a = 20\,cm$

$$a \sin B = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

$$a \sin B = 10$$

$a \sin B < b$ لهذا مثلث مذکور دوحل دارد.

مثال دوم: $\hat{C} = 48^\circ$ ، $c = 40cm$ ، $b = 25\,cm$ داده شده است امکان حل این مثلث را مطالعه نمائید؟



حل: C یک زاویه حاده است. $c > b$ یک حله دارد

مثال سوم: $B = 45 \quad , \quad c = 18 \quad , \quad b = 9\sqrt{2}$

یک زاویه حاده است و $b < c$

$$C \sin B = 18 \sin 45$$

$$= 18 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2} = b$$

یک حله دارد.

مثال چهارم : $A = 163^\circ$, $a = 97$, $b = 43$

A یک زاویه منفرجه است و $a > b$ است لهذا یک حل دارد .

مثال پنجم : در مثلث ABC ، $A = 54$ ، $c = 6\,cm$ و $a = 8\,cm$ داده شده است مثلث مذکور را حل کنید ؟

حل :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{8}{\sin 54} = \frac{6}{\sin C} \quad , \quad \sin C = \frac{6}{8} \sin 54^\circ$$

$$\operatorname{Log}\sin C = \operatorname{Log}6 + \operatorname{Log}\sin 54^\circ - \operatorname{Log}8$$

$$\operatorname{Log}\sin C = 0,77815 - 0,90309 + 9,90796 - 10$$

$$= 10,68611 - 10,90309$$

$$= 9,78302 - 10$$

$$\hat{C} = 37^\circ\ 21'$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\hat{B} = 180^\circ - 54^\circ - 37^\circ\ 21' = 88^\circ\ 39'$$

$$\hat{B} = 88^\circ\ 39'$$

همچنان :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

$$\operatorname{Log} b = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log}\sin B - \operatorname{Log}\sin A$$

$$\operatorname{Log} b = \operatorname{Log} 8 + \operatorname{Log}\sin 88\ \ 39 - \operatorname{Log}\sin 54$$

$$\operatorname{Log} b = 0,903 + 9,99988 - 10 - (9,90795 - 10)$$

$$\operatorname{Log} b = ,99501 \quad , \quad b = 9,89$$

مثال چهارم :

$$\cos 140^\circ = 2\cos^2 7\theta - 1$$

مثال پنجم :

$$\cos \frac{8\theta}{9} = 1 - 2\sin^2 \frac{4\theta}{9}$$

$$\cos 20\theta = 1 - 2\sin^2 10\theta$$
$$= 1 - 2(2\sin 5\theta \cos 5\theta)^2$$
$$= 1 - 8\sin^2 5\theta \cos^2 5\theta$$
$$= 1 - 8\sin^2 5\theta(1 - \sin^2 5\theta)$$
$$= 1 - 8\sin^2 5\theta + 8\sin^4 5\theta$$

تمرینات :

۱ - از فارمول دوچند یک زاویه استفاده نمود $\sin 120^\circ$ ، $\cos 120^\circ$ را دریافت نمائید؟

۲ - از فارمول دوچند یک زاویه استفاده نموده $\sin 15^\circ$ ، $\cos 15^\circ$ را دریافت نمائید؟

۳ - قیمت معادل افاده های مثلثاتی ذیل را بنویسید ؟

۴ - $= 2\sin \frac{\theta}{5} \cdot \cos \frac{\theta}{5}$

۵ - $= 12\cos^2 7\theta - 6$

۶ - $= 4\cos^2 4\theta - 4\sin^2 4\theta$

۷ - $= 4\cos^2 4\theta - 4\sin^2 4\theta$

۸ - $= \sqrt{\frac{1 - \cos 8\theta}{2}}$

۹ - $= \sqrt{\frac{1 + \cos 160^\circ}{2}}$

۱۰ - $= 6\sin 3\theta \cos 3\theta$

۱۱ - $= \cos \frac{3\theta}{4} + \sin^2 \frac{3\theta}{4}$

۱۲ - درصورتیکه $\cos A = \frac{4}{9}$ ، $270 < A < 360^\circ$ داده شده است $\cos \frac{A}{2}$ و $\cos 2A$ را دریافت کنید؟

$$\text{Log}\tan\frac{C-B}{2}=\text{Log}\,7,22+\text{Log}\cot 33^\circ\ 45'\ 50''-\text{Log}\,87,14$$

$$\text{Log}\tan\frac{C-B}{2}=0,85854-1,94022+10,17486-10$$

$$=9,09318-10$$

$$\frac{C-B}{2}=7^\circ\ 3'\ 50''$$

$$C-B=14^\circ\ 7'\ 40''$$

$$B+C=112^\circ\ 28'\ 20''$$

$$2C=126^\circ\ 36'$$

$$\hat{C}=63^\circ\ 18'$$

$$\hat{B}=49^\circ\ 10'\ 20''$$

اکنون :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}$$

$$\text{Log}\,a=\text{Log}\,c+\text{Log}\sin A-\text{Log}\sin C$$

$$\text{Log}\,a=\text{Log}\,47,18+\text{Log}\sin 67^\circ\ 34'\ 40''-\text{Log}\sin 63^\circ\ 18'$$

$$\text{Log}\,a=1,67376+9,96570-10-(9,95103-10)$$

$$\text{Log}\,a=1,67376+\not{9},96570-\not{1}\!0-\not{9},95103+\not{1}\!0$$

$\text{Log}\,a=1,68843$ یا $a=48,8$

مثال هشتم : در مثلث ABC ، $b=9,137$ ، $a=3,028$ ، $\hat{C}=32^\circ\ 18'\ 50''$ مثلث مذکور را حل کنید؟

حل :

$$\tan \frac{B-A}{2} = \frac{b-a}{b+a} \cot \frac{C}{2}$$

$$b - a = 9,137 - 3,028 = 6,109$$

$$b + a = 9,137 + 3,028 = 12,165$$

$$\tan \frac{B-A}{2} = \frac{6,109}{12,165} \cot 16^\circ\ 9'\ 25''$$

$$\text{Log} \tan \frac{B-A}{2} = \text{Log}\, 6,109 + \text{Log} \cot 16^\circ\ 9'\ 25'' - \text{Log}\, 12,165$$

$$\text{Log} \tan \frac{B-A}{2} = 0,78597 + 10,53804 - 10 - 1,08493$$

$$= 10,23908 - 10$$

$$\frac{B-A}{2} = 60^\circ\ 1'\ 46''$$

$$B - A = 120^\circ\ 3'\ 32''$$

$$B + A = 147^\circ\ 41'\ 10''$$

$$\hat{B} = 133^\circ\ 52'\ 22''$$

$$\hat{A} = 147^\circ\ 41'\ 10'' - 133^\circ\ 52'\ 22'' = 13^\circ\ 48'\ 48''$$

اکنون :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad , \quad C = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

$$\text{Log}\, c = \text{Log}\, a + \text{Log} \sin C - \text{Log} \sin A$$

$$\text{Log}\, c = \text{Log}\, 3,028 + \text{Log} \sin 32^\circ\ 18'\ 50'' - \text{Log}\, 13^\circ\ 48'\ 48''$$

$$= ,48116 + 9,72803 - 10 - (9,37806 - 10)$$

$$= ,48116 + ,72803 - ,37806$$

$$= 1,20919 - ,37806 = ,83113$$

$$\text{Log}\, c = ,83113 \qquad C = 6,77 \text{ cm}$$

مثال نهم : درمثلث ABC ، $C = 0,7815$ ، $a = 0,5366$

$\hat{B} = 123^\circ\ 12'\ 20''$ داده شده است. مثلث را حل کنید ؟

حل :

$\hat{A} + \hat{C} = 180 - 123^\circ\ 12'\ 20''$, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

$\hat{A} + C = 56^\circ\ 47'\ 40''$

$$\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{C-A}{2} = \frac{0,7815 - 0,5366}{0,7815 + 0,5366}\cot 61^\circ\ 36'\ 10''$$

$$\tan\frac{C-A}{2} = \frac{0,2449}{1,3181}\cot 61^\circ\ 36'\ 10''$$

$$\text{Log}\tan\frac{C-A}{2} = \text{Log}\ 0,2449 + \text{Log}\cot 61^\circ\ 36'\ 10''$$

$$- \text{Log}\ 1,3181$$

$$= \bar{1},38899 + 9,73287 - 10 - 0,11989$$

$$= -,99803 = \bar{1},00197$$

$$\frac{C-A}{2} = 5^\circ\ 44'\ 10''$$

$$C - A = 11^\circ\ 28'\ 20''$$

$$C + A = 56^\circ\ 47'\ 40''$$

$$2\hat{C} = 68^\circ\ 16'$$

$$\hat{C} = 34^\circ\ 8'$$

$$\hat{A} = 22^\circ\ 39'\ 40''$$

همچنان :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad , \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

$$\text{Log } b = \text{Log } a + \text{Log} \sin B - \text{Log} \sin A$$

$$\text{Log } b = \text{Log } 0,5366 + \text{Log} \sin 123^\circ\ 12'\ 20'' - \text{Log} \sin\ 22^\circ 39'\ 40''$$

$$\text{Log } b = \bar{1},72965 + 9,92255 - \cancel{10} - 9,58577 + \cancel{10}$$

$$= 1,6522 - 1,58577 = ,06643$$

$$\text{Log } b = ,06643 \qquad \therefore b = 1,17$$

حل مثلث های ایکه طول اضلاع آنها معلوم باشد :

مثال اول : طول اضلاع یک مثلث بالترتیب $a = 810 \text{ cm}$ ، $c = 990 \text{ cm}$ و $b = 360 \text{ cm}$ میباشد زوایای این مثلث را دریافت کنید ؟

حل :

$$2S = a + b + c = 810 + 990 + 360$$

$$2S = 2160 \quad , \quad S = 1080$$

$$S - a = 1080 - 810 = 270$$

$$S - b = 1080 - 990 = 90$$

$$S - c = 1080 - 360 = 720$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{90 \times 720}{1080 \times 270}}$$

$$\text{Log}\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\left\{\text{Log}\,90+\text{Log}\,720-\text{Log}\,1080-\text{Log}\,270\right\}$$

$$\text{Log}\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\left\{1,95424+2,85733-3,83342-2,43136\right\}$$

$$\text{Log}\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(0,65317) = 0,32658$$

$$\text{Log}\tan\frac{A}{2} = 9,67342-10 \quad , \quad \frac{A}{2} = 25^\circ\ 14'\ 22''\frac{1}{2}$$

$$\hat{A} = 50^\circ\ 28'\ 45''$$

اکنون $\hat{B}$ را بدست میآوریم:

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(S-c)(S-a)}{S(S-b)}}$$

$$\text{Log}\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{2}(\text{Log}\,720+\text{Log}\,270-\text{Log}\,1080-\text{Log}\,90)$$

$$\text{Log}\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{2}(2,85733+2,43136-3,03342-1,95424)$$

$$\text{Log}\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{2}(,30103) = ,15051$$

$$\tan\frac{B}{2} = 10,15051-10$$

$$\frac{B}{2} = 54^\circ\ 44'\ 7'' \quad , \quad \hat{B} = 109^\circ\ 28'\ 14''$$

با درنظرداشت $\hat{B}$ و $\hat{C}$ داریم که:

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A}+\hat{B})$$

$$\hat{C} = 180 - (109^\circ\ 28'\ 14'' + 50^\circ\ 28'\ 45'')$$

$$\hat{C} = 20^\circ\ 3'\ 1''$$

مثال دوم: اضلاع یک مثلث بالترتیب $a = 88,36$ ، $c = 108,7$ و $b = 72,35\ cm$ میباشد مثلث راحل کنید؟

حل :

$$2S = a+b+c$$

$$S = \frac{a+b+c}{2} \quad , \quad 2S = 88,36 + 72,35 + 108,7$$

$$2S = 269,41 \quad , \quad S = 134,7$$

$$S-a = 134,7 - 88,36 = 46,34$$

$$S-b = 134,7 - 72,35 = 62,35$$

$$S-c = 134,7 - 108,7 = 26$$

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{62,35 \times 26}{134,7 \times 46,34}}$$

$$\text{Log}\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(\text{Log}\,62,35 + \text{Log}\,26 - \text{Log}\,134,7 - \text{Log}\,46,34)$$

$$\text{Log}\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(\text{Log}\,62,35 + \text{Log}\,26 - \text{Log}\,137,4 - \text{Log}\,46,34$$

$$= \frac{1}{2}(1,79484 + 1,41497 - 2,12931 - 1,66596$$

$$= \frac{1}{2}(-\,,58546) = -\,,29273$$

$$= 9,70727 - 10$$

$$\therefore \frac{A}{2} = 27^\circ\ 00'\ 40''$$

$$\hat{A} = 54^\circ\ 0'\ 40''$$

همچنان :

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{26 \times 46,34}{134,7 \times 62,35}}$$

$$\text{Log}\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{2}(\text{Log}\,26 + \text{Log}\,46{,}34 - \text{Log}\,134{,}7 - \text{Log}\,62{,}35)$$

$$= \frac{1}{2}(1{,}41497 + 1{,}66596 - 2{,}12931 - 1{,}79484)$$

$$= \frac{1}{2}(-{,}84322) = -{,}42161$$

$$\text{Log}\tan\frac{B}{2} = 9{,}57839 - 10 \quad , \quad \frac{B}{2} = 20^\circ\ 44'\ 45''$$

$$\hat{B} = 41^\circ\ 29'\ 30'' \quad , \quad \hat{C} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{A})$$

$$\hat{C} = 180 - (95^\circ\ 30'\ 10'') \quad , \quad \hat{C} = 84^\circ\ 29'\ 50''$$

تمرینات : عناصر ذیل در یک مثلث داده شده است مثلث را حل کنید .

$\hat{C} = 79^\circ\ 17'\ 4''$ ، $\hat{A} = 46^\circ\ 31'\ 8''$ ، $a = 38{,}124$ - 1

$\hat{C} = 24^\circ\ 25{,}8'$ ، $\hat{A} = 111^\circ\ 42{,}7'$ ، $b = 282{,}66$ - 2

$C = 13$ ، $b = 10$ ، $a = 7$ - 3

$c = 4\,cm$ ، $b = 3\,cm$ ، $a = 2\,cm$ - 4

$\hat{A} = 74^\circ\ 27'$ ، $b = 215$ ، $c = 105$ - 5

$\hat{B} = 65^\circ\ 10'$ ، $\hat{A} = 54^\circ\ 40'$ ، $a = 125$. - 6

$A = 35^\circ\ 20'$ ، $c = 475$ ، $a = 320$ - 7

$c = 26{,}4$ ، $b = 18{,}6$ ، $a = 24{,}5$ 8

توابع معکوس مثلثاتی :

از تابع مثلثاتی $x = \sin y$ چنین درک میشود که x عبارت از عددیست که ساین قوس y رانشان میدهد . یا به عبارت دیگر y قوس است که x ساین این قوس میباشد .

c : $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ d : $\sin\beta\cos\alpha + \cos\alpha\sin\beta$

(III) $\sin(\alpha - \beta) = ?$

a : $\cos\alpha\sin\beta + \sin\beta\cos\beta$ b : $\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

c : $\cos\beta\sin\beta + \sin\alpha\cos\alpha$ d : $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

(IV) $\cos(\alpha - \beta) = ?$

a : $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ b : $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

c : $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ d : $\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$

(V) $\tan(40^\circ + 35^\circ) = ?$

a : $\dfrac{\tan 45^\circ - \tan 35^\circ}{\tan 45^\circ \cdot \tan 35^\circ - 1}$ b : $\dfrac{\tan 40^\circ + \tan 35^\circ}{1 - \tan 35^\circ \cdot \tan 40^\circ}$

c : $\dfrac{\tan 45^\circ \cdot \tan 35^\circ - 1}{\tan 45^\circ - \tan 35^\circ}$ d : $\dfrac{\tan 45^\circ \cdot \tan 35^\circ + 1}{\tan 45^\circ + \tan 35^\circ}$

(VI) $\cos 70^\circ \cos 10^\circ + \sin 70^\circ \sin 10^\circ = ?$

a : $\sin 80^\circ$; b : $\cos 80^\circ$; c : $\cos 60^\circ$; d : $\sin 60^\circ$

(VII) $\cot A - \cot B = ?$

a : $\dfrac{\sin(B-A)}{\sin A \sin B}$; b : $\dfrac{\cos(B-A)}{\cos A \cos B}$; c : $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin A \sin B}$; d : $\dfrac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B}$

(VIII) $7\cos 8\theta \cos\theta + 7\sin 8\theta \sin\theta = ?$

a : $\sin 7\theta$ b : $7\sin 8\theta$

c : $7\cos 7\theta$ d : $7\cos 8\theta$

و به این شکل نوشته میشود $y = arc\sin x$ که تابع معکوس مثلثاتی $x = \sin y$

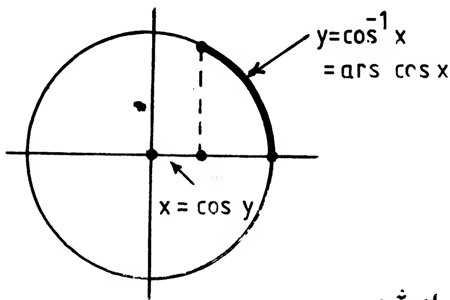
میباشد . همچنان $y = arc\tan x$ تابع معکوس مثلثاتی $x = \tan y$ و $y = arc\cos x$ تابع

معکوس مثلثاتی $x = \cos y$ میباشد . طور مثال در معادله $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

در اینجا $\frac{1}{2}$ عبارت از ساین قوس 30° میباشد و به این شکل نوشته میشود :

$arc\sin \frac{1}{2} = 30^\circ , 150 \cdots\cdots$ میباشد وچنین خوانده میشود که قوس ساین $\frac{1}{2}$

عبارت از 30° ، 150° ... میباشد .



به همین ترتیب تابع معکوس $x = \cos y$

عبارت از $y = arc\cos x$ میباشد

که درشکل نشان داده شده است .

همچنان ... $arc\cos 0 = \frac{\pi}{2} , \frac{5\pi}{2}$ میباشد .

در توابع مثلثاتی همچو $y = \sin\theta$, θ تنها یک عدد و یا یک قیمت میداشته باشد . اما در توابع

معکوس مثلثاتی چندین قیمت برای θ وجود دارد . مثلاً $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ تنها $\frac{1}{2}$ ساین θ

میباشد بالعکس درتابع معکوس مثلثاتی $ars\sin\frac{1}{2} = 30^\circ , 150^\circ , ..210^\circ \ldots$ میباشد

در اصطلاح ریاضی بعوض $y = ars\sin x$ تابع $y = \sin^{-1} x$ می نویسند

سمبول $\sin^{-1} x$ به معنی $ars\sin x$ میباشد. همچنان عوض $ars\cos x$ سمبول $\cos^{-1} x$

وعوض $y = arc\tan x$ ، $\tan^{-1} x$ نوشته میشود. اما اشتباه نشود که $\sin^{-1} x$

بمعنای $y = \frac{1}{\sin x}$ نمیباشد ؛ بلکه $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$ وافاده های دیگر آن

$y = arc\cos x = \cos^{-1} x$ و $y = arc\tan x = \tan^{-1} x$ میباشد

معادلات $x = \sin y$, $x = \cos y$ و $x = \tan y$ بالترتیب با معادلات

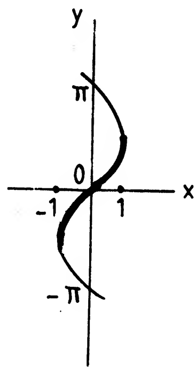
$y = ars\sin x$ و $y = ars\cos x$, $y = ars\tan x$ معادل اند

بنابرآن میتوانیم به آسانی نتیجه بگیریم که گراف های توابع معکوس مثلثاتی با گراف های توابع مثلثاتی طوری ارتباط دارند که گویا محورات x و y شان با همدیگر تبدیل موقعیت نموده باشند .

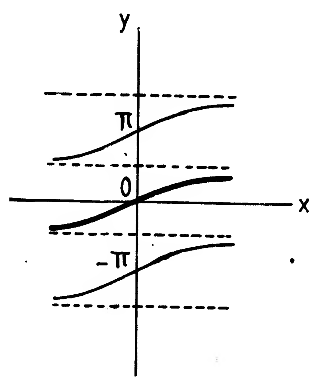
توابع مثلثاتی معکوس :

گراف $y = \arcsin x$ عبارت از گراف $x = \sin y$ بوده و از گراف $y = \sin x$ اختلاف و فرق دارد .

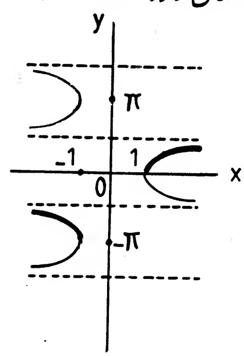
گراف $y = \arcsin x$ عبارت از منحنی $\sin x$ است که بروی محور y ترسیم شده است به همین ترتیب گراف های تمام توابع معکوس مثلثاتی بروی محور y ترسیم شده اند که درشکل ذیل نشان داده شده اند :



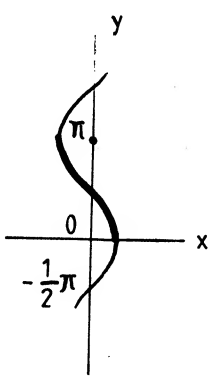
$y = \arcsin x$



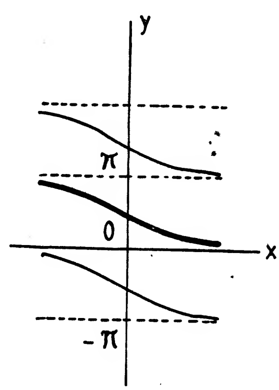
$y = \arctan x$



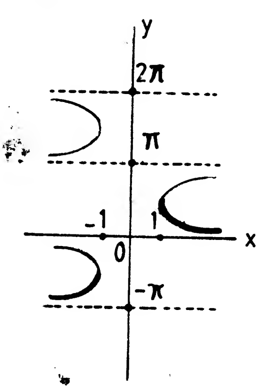
$y = \text{arc sec } x$



$y = \arccos x$



$y = \text{arc cot } x$



$y = \text{arc csc } x$

مثال : $\operatorname{arc\,sin}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$ زیرا $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ and $0<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arc\,cos}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$ 〃 $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $0<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arc\,tan} 1=\frac{\pi}{4}$ 〃 $\tan\frac{\pi}{4}=1$, $0<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arc\,sin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$

$\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$

$\operatorname{arc\,tan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}$

تمرینات :

1_ $\operatorname{arc\,cos}\frac{\sqrt{3}}{2}=?$

2_ $\operatorname{arc\,sin}(-1)=?$

3_ $\operatorname{arc\,sin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=?$

4_ $\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=?$

5_ $\operatorname{arc\,sin}\frac{\sqrt{2}}{2}=?$

6_ $\operatorname{arc\,sin} 0=?$

7_ $\operatorname{arc\,cos}\frac{\sqrt{2}}{2}=?$

8_ $\operatorname{arc\,cos} -\frac{1}{2}=?$

9_ $\operatorname{arc\,cos} -1=?$

10_ $\operatorname{arc\,tan} 0=?$

11_ $\operatorname{arc\,tan}(-\sqrt{3})=?$

12_ $\operatorname{arc\,sec}\frac{2}{\sqrt{3}}=?$

13_ $\operatorname{arc\,cosec}\sqrt{2}=?$

فصل ششم

معادلات مثلثاتی

مطابقت ها ی مثلثاتی از قبیل $\sin x \csc x = 1$, $\tan x \cot x = 1$, $\cos x \sec x = 1$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ، $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ . . . . به تمام قسمت ها ی x

صدق می نمایند . اما معادلات مثلثاتی شکل $\sin x = 0$ و $\sin x - 2\sin x \cos x = 1$

و امثال این ها تنها به یک قیمت مخصوص x که حل معادله میباشد صدق مینمایند به تمام قیمت

ها ی x صدق نه مینمایند. طور مثال در معادله $\sin x = 0$ حل آن تنها . . . . , $x = 0, \pi$

میباشد که معادله را صدق مینماید و شکل عمومی حل آن $x = 0 + 2n\pi$ و $x = \pi + 2n\pi$ میباشد.

حل معادله $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ عبارت است از : . . . . $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

شکل عمومی حل آن $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ و $x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ میباشد .

بالآخره به چنین نتیجه میرسیم که مطابقت ها به تمام قیمت ها ی مجهول (x) صدق می نمایند

اما معادلات تنها به یک قیمت حل شان صدق مینمایند .

برای اینکه تمام معادلات مثلثاتی را تحقیق و حل نمائیم . لازم است هر نوع معادله مثلثاتی را بصورت

جداگانه با در نظر داشت خصوصیات هر معادله توضیح و حل نمائیم :

حل معادلهٔ مثلثاتی درجه اول که از جنس $\sin x$ و $\cos x$ درجه اول میباشند : اکنون معادلهٔ

$a \sin x + b \cos x = c$ را که از جنس $\sin x$ و $\cos x$ خطی درجه اول میباشد حل مینمائیم :

a ، b و c اعداد ثابت میباشند . $a \sin x + b \cos x = c$

اطراف معادلهٔ فوق را به a تقسیم مینمائیم:

$$\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$$

$\frac{b}{a} = \tan\phi$ وضع میکنیم :

$$\sin x + \tan\phi \cos x = \frac{c}{a}$$

$$\sin x + \frac{\sin\phi}{\cos\phi}\cos x = \frac{c}{a}$$

$$\sin x \cos\phi + \cos x \cdot \sin\phi = \frac{c}{a}\cos\phi$$

$$\sin(x+\phi) = \frac{c}{a}\cdot\cos\phi$$

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin(x+\phi) = \frac{c}{\not{a}}\ \frac{\not{a}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin(x+\phi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

برای اینکه معادله حل داشته باشد باید شرط ذیل را صدق نماید $-1 \leqslant \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1$ باشد . در صورت موجودیت شرط فوق معادله فوق امکان حل را دارد .

$\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ یک عدد n رامیدهد یعنی : $\sin(x+\phi) = n$

عدد n زاویه کوچک α رامیدهد یعنی $x+\phi = \alpha$

حل عمومی معادله عبارت است از : $x+\phi = 2n\pi + \alpha$

$$x = 2n\pi + \alpha - \phi$$

هرگاه α حل معادله باشد $\pi - \alpha$ نیز حل معادله میباشد . لهذا حل عمومی دیگر معادله عبارت است از

$$x+\phi = 2n\pi + \pi - \alpha$$

برای اینکه جواب ما تمام حل ها را در برگیرد حل عمومی رامیتوانیم به این شکل بنویسیم :

$x = n\pi + (-1)^n\alpha - \phi$ یا $x = 2n\pi + \pi - \alpha - \phi$

$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\sin(x+\phi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

شرط امکان حل معادله :

باید
$$-1 \leqslant \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1$$

$$\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1$$

$$c^2 \leqslant a^2+b^2$$

هر معادله ای که این شرط را صدق نماید قابل حل است .

مثال اول : معادله ذیل را حل نمائید :

$$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$$

حل : شرط امکان حل را مطالعه مینمائیم :

$$c^2 \leqslant a^2+b^2$$
$$(\sqrt{2})^2 \leqslant 1^2+1^2$$
$$2 = 2$$

امکان حل را دارد .

$$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$$

وضع میکنیم
$$\frac{b}{a} = 1 \quad , \quad \tan\phi = 1$$

$$\sin\theta + \tan\phi\cos\theta = \sqrt{2}$$

$$\sin\theta + \frac{\sin\phi}{\cos\phi}\cos\theta = \sqrt{2}$$

$$\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi = \sqrt{2}\cos\phi$$

$$\sin(\theta+\phi) = \sqrt{2}\cos\phi$$

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}} \quad , \quad \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\theta+\phi) = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\theta+\phi) = 1$$

کوچکترین زاویه $\theta + \phi = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \phi$

$$\theta + \phi = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - \phi$$

چون $\tan\phi = 1$ میباشد بناءً $\phi = \frac{\pi}{4}$ میباشد

$$\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$$

در صورت دیگر چون $\frac{\pi}{2}$ یک جذر کوچک معادله است بناءً $\pi - \frac{\pi}{2}$ نیز یک جذر معادله میباشد پس میتوانیم بنویسیم

$$\theta = 2n\pi + \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$$

چون تعداد حلها بسیار زیاد میباشد بناءً فارمول عمومی را بشکل وضع مینمائیم که تمام حل ها را در برگیرد:

$$\theta + \phi = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2} \quad \text{یا} \quad \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

θ تمام زوایائی که حل این معادله میباشد نشان میدهد :

مثال دوم :

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{2}$$

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$$

$$\sin x + \tan\frac{\pi}{3}\cos x = \sqrt{2}$$

$$\sin x + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos x = \sqrt{2}$$

$$\sin x\cos\frac{\pi}{3} + \cos x\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}, \ldots$$

$$x + \frac{\pi}{3} = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$x = 2n\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$$

$$x = 2n\pi + \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$$

حل عمومی آن بشکل :

$$x + \frac{\pi}{3} = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}$$

و یا $x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$ میباشد

x تمام زوایائی را که حل این معادله میباشد نشان میدهد .

طریقه دوم :

درمعادله خطی $a\sin x + b\cos x = c$ قیمت های $\sin x$ و $\cos x$ را

ازجنس $\tan \frac{x}{2}$ تعویض مینمائیم :

$$a \cdot \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} + b \frac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} = c$$

$$2a \tan \frac{x}{2} + b\left(1-\tan^2 \frac{x}{2}\right) = c\left(1+\tan^2 \frac{x}{2}\right)$$

$$2a \tan \frac{x}{2} + b - b \tan \frac{x}{2} = c + c \tan \frac{x}{2}$$

$$- b \tan \frac{x}{2} - c \tan \frac{x}{2} + 2a \tan \frac{x}{2} + (b-c) = 0$$

$$(b+c) \tan^2 \frac{x}{2} - 2a \tan \frac{x}{2} - (b-c) = 0$$

یک معادلهٔ درجه دوم ازجنس $\tan \frac{x}{2}$ میباشد .

درصورتی قابل حل میباشدکه $\Delta \geqslant 0$ باشد

$$\Delta' = b'^2 - ac$$

$$\Delta' = a^2 + (b+c)(b-c)$$

$$\Delta' = a^2 + (b^2 - c)^2$$

$$\Delta' = a^2 + b^2 - c^2$$

$$a^2 + b^2 - c^2 \geqslant 0$$

$$c^2 \leqslant a^2 + b^2$$ شرط امکان حل

مثال اول :

$$2 \sin x + \cos x = 2$$

$$2 \cdot \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} + \frac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan \frac{x}{2}} = 2$$

$$4 \tan \frac{x}{2} + 1 - \tan^2 \frac{x}{2} = 2\left(1+\tan^2 \frac{x}{2}\right)$$

$$4 \tan \frac{x}{2} + 1 - \tan \frac{x}{2} = 2 + 2 \tan^2 \frac{x}{2}$$

$$3\tan^2\frac{x}{2}-4\tan\frac{x}{2}+1=0$$

$$(\tan\frac{x}{2}-1)(3\tan\frac{x}{2}-1=0$$

$$\tan\frac{x}{2}=1 \quad , \quad \tan\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x}{2}=r\pi+\frac{\pi}{4} \Longrightarrow x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{2}=n\cdot 180^\circ+18^\circ\ 26' \quad , \quad x=2n\ 180^\circ+36^\circ\ 52'$$

مثال دوم : $2\sin x+3\cos x=3$

بعوض $\sin x$ و $\cos x$ قیمت های آنها را از جنس $\tan\frac{x}{2}$ وضع میکنیم

$$\frac{4\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}+\frac{(1-\tan^2\frac{x}{2})}{1+\tan\frac{x}{2}}=3$$

$$4\tan\frac{x}{2}+3-3\tan^2\frac{x}{2}=3+3\tan^2\frac{x}{2}$$

$$6\tan^2\frac{x}{2}-4\tan\frac{x}{2}=0$$

$$3\tan^2\frac{x}{2}-2\tan\frac{x}{2}=0$$

$$\tan\frac{x}{2}(3\tan\frac{x}{2}-2)=0$$

$$\tan\frac{x}{2}=0 \quad , \quad \frac{x}{2}=0 \quad , \quad \frac{x}{2}=n\pi \quad , \quad x=2n\pi$$

$$3\tan\frac{x}{2}-2=0 \quad , \quad 3\tan\frac{x}{2}=2$$

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{2}{3} \quad , \quad \tan\frac{x}{2}=0,6666$$

$$\frac{x}{2}=33'\ 41'\ 12''$$

$$\frac{x}{2}=n\cdot 180^\circ+33'\ 41'\ 12''$$

دریافت نسبت های مثلثاتی یک زاویه ازجنس نصف زاویه :

اگر α یک زاویه کیفی باشد میتوانیم بنویسیم که : $\alpha = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}\ \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\ \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \left(1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 + \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\tan\alpha = \tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\alpha}{2}}{1 - \tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

اکنون قیمت های $\sin\alpha$ ، $\cos\alpha$ ، $\tan\alpha$ را ازجنس $\tan\frac{\alpha}{2}$ دریافت می نمائیم :

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{1}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$x = 2n \cdot 180 + 67^\circ\ 22'\ 24''$$

حل معادله $a \tan x + b \cot x = c$

$$a \tan x + \frac{b}{\tan x} = c$$

$$a \tan x + b = c \tan x$$

$$a \tan^2 x - c \tan x + b = 0$$

این معادله از جنس $\tan x$ یک معادله درجه دوم است .

شرط امکان حل :

$$\Delta \geqslant 0$$

$$c^2 - 4ab > 0$$

$$c^2 \geqslant 4ab$$

درصورت موجودیت این شرط معادله امکان حل را دارد .

مثال اول :

$$2 \tan x - \cot x = 1$$

$$2 \tan x - \frac{1}{\tan x} = 1$$

$$2 \tan^2 x - 1 = \tan x$$

$$2 \tan^2 x - \tan x - 1 = 0$$

$$c^2 \geqslant 4ab \quad , \quad 1 \geqslant 4 \cdot 2 \cdot (-1)$$

$$1 \geqslant -8$$

امکان حل را دارد.

$$2 \tan^2 x - \tan x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$\tan x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

کوچکترین زاویه

$\tan x = 1 \quad , \quad x = \frac{\pi}{4}$

$x = n\pi + \frac{\pi}{4}$

$\tan x = -0,5$

کوچکترین زاویه

$x = 26^\circ\ 34'$

$x = n \cdot 180^\circ + 26^\circ\ 34'$

حل معادله فوق به طریقه دوم :

$2\tan x - \cot x = 1$

$2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = 1$

$2\sin^2 x - \cos^2 x = \sin x \cos x$

$2 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{\sin 2x}{2}$

$2(1-\cos 2x) - 1 - \cos 2x = \sin 2x$

$2 - 2\cos 2x - 1 - \cos 2x = \sin 2x$

$-3\cos 2x + 1 = \sin 2x$

$\sin 2x + 3\cos 2x - 1 = 0$

امکان حل را دارد $10 > 1$ ، شرط امکان حل $a^2+b^2 \geq c^2$

یک معادله درجه اول ازجنس $\sin 2x$ و $\cos 2x$ است که سابق حل شده است .

حل معادلات درجه دوم مثلثاتی :

این شکل معادلات ازجنس $\sin x$ ، $\cos x$ درجه دوم میباشد

$a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x \cos x = d$

a ، b ، c ، d اعداد ثابت میباشند

اطراف معادله فوق را به $\cos^2 x$ تقسیم میکنیم :

$$a\tan^2 x + b + c\tan x = d\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$a\tan^2 x + b + c\tan x = d\cdot\frac{1}{\frac{1}{1+\tan^2 x}}$$

$$a\tan^2 x + b + c\tan x = d(1+\tan^2 x)$$

$$a\tan^2 x + b + c\tan x - d\tan^2 x - d = 0$$

$$(a-d)\tan^2 x + c\tan x + b - d = 0$$

شرط امکان حل

$$\Delta = C^2 - 4(a-d)(b-d) \geqslant 0$$

یا $C^2 \geqslant 4(a-d)(b-d)$

مثال اول :

$$2\sin^2 x + 3\cos^2 x - 2\sin x\cos x = 2$$

$$a = 2 \quad ; \quad b = 3 \quad ; \quad c = -2 \quad ; \quad d = 2$$

$$(-2)^2 \geqslant 4(2-2)(3-2)$$

$$4 \geqslant 0$$

امکان حل دارد.

مثال دوم :

$$2\sin^2 x + \cos x - \sin x\cos x = 1$$

$$C^2 \geqslant 4(a-d)(b-d)$$

$$(-1)^2 \geqslant 4(2-1)(1-1)$$

$$1 > 0$$

اطراف معادله را به $\cos^2 x$ تقسیم میکنیم :

$$2\tan^2 x + 1 - \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$2\tan^2 x + 1 - \tan x = 1(1 + \tan^2 x)$$

$$2\tan^2 x + 1 - \tan x = 1 + \tan^2 x$$

$$2\tan^2 x - \tan^2 x - \tan x = 0$$

$$\tan^2 x - \tan x = 0$$

$$\tan x(\tan x - 1) = 0$$

$$\tan x = 0$$

$$x = 0, \pi, 2\pi, \ldots\ldots$$

یا $x = n\pi$

$$\tan x - 1 = 0 \quad , \quad \tan x = 1$$

$x = \frac{\pi}{4}$ کوچکترین زاویه

یا $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$

$$S = \left\{ x = n\pi \quad ; \quad x = n\pi + \frac{\pi}{4} \right\}$$

مثال سوم :

$$\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \quad , \quad \cos x_{12} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$x = 0 \quad , \quad x = 2n\pi + 0$$

$\cos x = 2$ ناممکن است .

مثال : حل کنید ؟

$$2\tan^2 x + \sec^2 x = 2$$

$$2\tan^2 x + 1 + \tan^2 x = 2$$

$$3\tan^2 x = 1$$

$$\tan^2 x = \frac{1}{3} \quad , \tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad x = \frac{\pi}{6} \; , \; \frac{7\pi}{6} \quad \dots\dots\dots$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad x = \frac{5\pi}{6} \; , \; \frac{11\pi}{6}$$

بعدازامتحان معلوم شدکه حلهای مطلوبه و $0 \leqslant x < 2\pi$ ، عبارت انداز

$$x = \frac{\pi}{6} \; , \; \frac{5\pi}{6} \; , \; \frac{7\pi}{6} \; , \; \frac{11\pi}{6}$$

مثال : حل کنید ؟

$$\sec x + \tan x = 0$$

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin}{\cos x} = 0$$

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x} = 0$$

$$1 + \sin x = 0$$

$$\sin x = -1$$

$$x = \frac{3\pi}{2}$$

اما $x = \frac{3\pi}{2}$ معادله اولی راصدق نمیکند بناءً جذر معادله شمرده نمیشود

مثال : حل کنید ؟

$$\tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0$$

$$(\tan x - 1)(\tan x - 3) = 0$$

$$\tan x - 1 = 0$$

$$\tan x = 1 \quad , \quad x = \frac{\pi}{4} \; , \; \frac{5\pi}{4} \; , \; \dots$$

$$x = n\pi + \frac{\pi}{4}$$

$\tan x - 3 = 0$; $\tan x = 3$, $x = 71^\circ\ 34' , 251^\circ\ 34'$

$$x = n\pi + 71^\circ\ 34'$$

تمرینات : معادلات مثلثاتی ذیل را حل کنید .

1, $\sqrt{3}\ \sin x - \cos x - 1 = 0$

2, $2\sin^2 x - 1 = 0$

3, $\tan^2\theta - 3 = 0$

4, $\sin\theta + \cos\theta = -\sqrt{2}$

5, $1 - \sin\theta = \sqrt{3}\ \cos\theta$

6, $\sin^2\theta = 8\sin\theta + 3$

7, $6\sin^2\theta + \cos\theta = 5$

8, $5\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$

9, $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

10, $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

11, $2\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos = 1$

12, $\sin^2 x - \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1$

13, $3\sin x + 2\cos x = 2$

14, $4\cos^2 x - 2(\sqrt{3} + 1)\cos x + \sqrt{3} = 0$

15, $\tan^2 x - \tan x - 2 = 0$

16, $16\cos^4 x - 20\cos x + 5 = 0$

17, $8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1 = 0$

18, $\sqrt{3}\ \sin x - \cos x = \sqrt{2}$

حل سیستم معادلات دومجهوله مثلثاتی

گروپ اول : معادلات دومجهوله ازجنس ساین یک زاویه وخود زاویه :

I : $\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ x + y = \alpha \end{cases}$ II : $\begin{cases} \sin x - \sin y = a \\ x - y = \alpha \end{cases}$

III : $\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ x + y = \alpha \end{cases}$ IV : $\begin{cases} \cos x - \cos y = a \\ x - y = \alpha \end{cases}$

حل : حل همچو معادلات دریافت قیمت زوایای x و y است درصورتیکه هردو معادله راتحقیق نماید .

$$\sin x + \sin y = a \quad \cdots\cdots (1)$$

$$x + y = \alpha \quad \cdots\cdots (2)$$

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a$$

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

چون طرف راست معادله معین و داده شده است ، بناءً ($x - y$) بدست میآید:

وازطرفی ($x + y$) هم معلوم است بناءً بعدازحل سیستم معادله قیمت های x و y بدست میآیدوشرط امکان حل اینست که :

$$\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \leqslant 1$$

$$a^2 \leqslant 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{یا} \quad a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \leqslant 0$$

بکمک طریقه فوق سیستم های دیگر رامیتوانیم حل نمائیم .

گروپ دوم :

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \sin y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cos y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cos y = a \end{cases}$$

معادلات دوم گروپ فوق به قسم حاصل ضرب بوده آنها را به حاصل جمع و یا تفاضل شان تبدیل نموده

با معادلهٔ اولی آن مثل سوال پیشتر حل مینمائیم .

از جمله سیستم اخیر را حل مینمائیسم :

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ \sin x \cos y = a \end{cases}$$

$$\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2 \sin x \cos x$$

$$x + y = \alpha$$

$$\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2a$$

$$\cos(x - y) - \cos \alpha = 2a$$

$$\cos(x - y) = 2a + \cos \alpha$$

چون طرف راست معادله ثابت و معین است بناءً ، $x - y$ ، معلوم شده است

$x - y = const$ را با $x + y = \alpha$ حل مینمائیسم قیمت های x و y بدست میآید .

و قیمت مجهول معادله حل میشود .

شرط امکان حل معادله فوق :

$$(2a + \cos\alpha)^2 \leqslant 1$$

$$4a^2 + 4a\cos\alpha + \cos^2\alpha \leqslant 1$$

$$4a^2 + 4a\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1 \leqslant 0$$

$$4a^2 + 4a\cos\alpha - \sin^2\alpha \leqslant 0$$

باید اشاره غیر مساوات فوق را دریافت نمائیم تا ساحهٔ تحقیق معلوم شود.

$$4a^2 + 4\cos\alpha\, a - \sin^2\alpha = 0$$

جذرهای این معادله :

$$a_1 = -\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a_2 = \sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad -\cos^2\frac{\alpha}{2} \leqslant a \leqslant \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

گروپ سوم :

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

حل :

$$\frac{\sin x}{\sin y} = a$$

$$x + y = \alpha$$

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin y} = \frac{a+1}{1}$$

همچنان :

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin y} = \frac{a-1}{1}$$

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{a-1}{a+1}$$

$$\frac{\not{2}\cos\frac{x+y}{2}\ \sin\frac{x-y}{2}}{\not{2}\sin\frac{x+y}{2}\ \cos\frac{x-y}{2}} = \frac{a-1}{a+1}$$

$$\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{x-y}{2} = \frac{a-1}{a+1}$$

$$\tan\frac{x-y}{2} = \frac{a-1}{a+1}\tan\frac{\alpha}{2}$$

چون طرف راست معادله ثابت و معین است یک زاویه $= \frac{x-y}{2}$ بدست میآید . واز حل سیستم

$$x + y = \alpha \qquad \frac{x-y}{2} = \theta$$

(θ یک زاویه است)

قیمت های x و y را دریافت مینمائیم .

همچنان معادلات مقابل سیستم را به قسم طریقهٔ فوق حل مینمائیم

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = a \\ x - y = \alpha \end{cases}$$

همچنان سیستم معادلات مقابل را طور ذیل حل مینمائیم

$$\frac{\cos x}{\cos y} = a$$

$$x + y = \alpha$$

حل :

$$\frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} = \frac{a-1}{a+1}$$

$$\frac{-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = \frac{a-1}{a+1}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{x-y}{2} = \frac{a-1}{a+1}$$

$$\tan\frac{x-y}{2} = \frac{a-1}{a+1}\cot\frac{\alpha}{2}$$

طرف راست معادله ثابت است و یک قیمت معین دارد . ازاینجا یک زاویه $\frac{x-y}{2} =$ نتیجه میشود و $x + y = \alpha$ داده شده است از حل این سیستم دو مجهوله قیمت های x و y بدست میآید .

صورت و مخرج کسر فوق را به $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ تقسیم مینمائیم :

$$\sin\alpha = \frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

قیمت $\sin\alpha$ ازجنس $\tan\frac{\alpha}{2}$ عبارت است از :

$$\sin\alpha = \frac{2\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{1} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

صورت و مخرج کسر فوق را به $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ تقسیم مینمائیم :

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

قیمت $\cos\alpha$ ازجنس $\tan\frac{\alpha}{2}$ عبارت است از :

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$\tan\alpha$ ازجنس $\tan\frac{\alpha}{2}$ عبارت است از :

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

هرگاه سیستم به شکل $\frac{\sin x}{\cos y} = a$ و $x - y = \alpha$ باشد مخرج معادله اولی را به قیمت معادل آن تعویض مینمائیم

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin(\frac{\pi}{2} - y)} = a \\ x - y = \alpha \end{cases}$$

این معادله پیشتر حل شده است .

گروپ چهارم :

$$\tan x + \tan y = a$$

$$x + y = \alpha$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{1 - \tan x \tan y}$$

$$a = \tan\alpha(1 - \tan x \tan y)$$

$$a = \tan\alpha - \tan\alpha \cdot \tan x \tan y$$

$$\frac{a}{\tan\alpha} = 1 - \tan x \tan y$$

$$\tan x \tan y = 1 - \frac{a}{\tan\alpha}$$

$$\tan x \tan y = 1 - a\cot\alpha$$

طرف راست معادله فوق ثابت و معلوم است و ازطرفی $\tan x + \tan y = a$ میباشد. ازحل این سیستم دومجهوله قرار ذیل قیمت های x و y رابدست میآریم :

$$\begin{cases} \tan x + \tan y = a \quad \cdots\cdots\cdots (1) \\ \tan x \tan y = 1 - a\cot\alpha \end{cases}$$

$$\tan y = \frac{1 - a\cot\alpha}{\tan x}$$

در معادله اولی قیمت $\tan y$ را گذاشتیم

$$\tan x + \frac{1 - a\cot\alpha}{\tan x} = a$$

$$\tan^2 x + 1 - a\cot\alpha = a\tan x$$

$$\tan^2 x - a\tan x + 1 - a\cot\alpha = 0$$

این معادله درجه دوم از جنس x است بعد از حل این معادله قیمت $\tan x$ را در معادلهٔ (۱)، میگذاریم قیمت $\tan y$ و سپس قیمت y را بدست میآریم. درنتیجه زوایای x و y بدست میآید.

$$a^2 - 4(1 - a\cot\alpha) \geqslant 0$$

$$a^2 + 4a\cot\alpha - 4 \geqslant 0$$

باید جذور معادلهٔ فوق را دریافت کنیم:

این معادلهٔ درجه دوم از جنس a است

$$a^2 + 4\cot\alpha \cdot a - 4 = 0$$

با استفاده از فارمول حل معادلات درجه دوم می یابیم که جذرها چنین بدست میآیند:

$$a_1 = -\cot\frac{\alpha}{2}$$

$$a_2 = 2 \cdot \frac{\cancel{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cancel{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = 2\tan\frac{\alpha}{2}$$

a باید در خارج جذرها قیمت بگیرد تا مثبت باشد.

گروپ پنجم:

$$\begin{cases} \tan x \tan y = a \\ x + y = \alpha \end{cases}$$

حل:

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}$$

صورت و مخرج کسر فوق را از جنس مجموع و تفاضل آن مینویسیم :

$$\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)} = a$$

$$\frac{\cos(x-y) - \cos\alpha}{\cos(x-y) + \cos\alpha} = a$$

$$\cos(x-y) - \cos\alpha = a\cos(x-y) + a\cos\alpha$$

$$\cos(x-y) - a\cos(x-y) = \cos\alpha + a\cos\alpha$$

$$\cos(x-y)(1-a) = \cos\alpha(1+a)$$

$$\cos(x-y) = \frac{1+a}{1-a}\cos\alpha$$

$$-1 \leqslant \frac{1+a}{1-a} \leqslant 1$$ شرط امکان حل

گروپ ششم : سیستم معادلات ذیل را حل کنید ؟

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

حل : نظر به خواص تناسب رابطهٔ مقابل را نوشته کرده میتوانیم :

$$\frac{\tan x - \tan y}{\tan x + \tan y} = \frac{a-1}{a+1}$$

$$\frac{\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}}{\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}} = \frac{a-1}{a+1}$$

$$\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)} = \frac{a-1}{a+1}$$

$$\frac{\sin(x-y)}{\sin\alpha} = \frac{a-1}{a+1}$$

$$\sin(x-y) = \frac{a-1}{a+1}\sin\alpha$$

طرف راست معادله ثابت ومعین است . از این معادله قیمت $x-y$ بدست میآید ، هرگاه این معادله را با معادله اولی $x+y=\alpha$ حل کنیم از حل این سیستم قیمت های x و y که حل های این معادله است بدست میآید .

برای اینکه معادله فوق حل شده بتواند بشرط ذیل باید موجود باشد .

شرط امکان حل :

$$-1 \leqslant \frac{a-1}{a+1}\sin\alpha \leqslant 1$$

مثال : سیستم معادلات ذیل را حل مینمائیم :

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$a = 1 \qquad , \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

شرط امکان حل معادله فوق را مطالعه مینمائیم :

$$a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \leqslant 0$$

$$1 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 1 - 2 < 0$$

بناءً معادلهٔ مذکور قابل حل است آن را حل مینمائیم :

$$\sin x + \sin y = 1$$

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$$

$$2\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$$

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x-y}{2} = 1$$

$$2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} = 1$$

$$\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$$

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$x-y = \frac{\pi}{2}$$

این دو معادله را حل مینمائیم

$$x + y = \frac{\pi}{2}$$

$$x - y = \frac{\pi}{2}$$

$$2x = 2\frac{\pi}{2} \quad , \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$y = 0$$

$x = \frac{\pi}{2}$ و $y = 0$ حل‌های معادلهٔ فوق است

مثال : سیستم معادلات مثلثاتی ذیل را حل کنید :

$$\begin{cases} x + y = \pi \\ \sin x \sin y = 1 \end{cases}$$

شرط حل معادلهٔ فوق را مطالعه مینمائیم :

$$a = 1$$

$$\alpha = \pi$$

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2} \leqslant a \leqslant \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$-\cos^2\pi \leqslant 1 \leqslant \sin^2\frac{\pi}{2}$$

$$-1 \leqslant 1 \leqslant 1$$

امکان حل را دارد :

$$2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

معادله 2 را ازجنس تفاضل توابع مثلثاتی آن مینویسیم :

$$2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos\pi = 1$$

$$\cos(x-y) - \cos\pi = 2$$

$$\cos(x-y) - (-1) = 2$$

$$\cos(x-y) = 2-1$$

$$\cos(x-y) = 1$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = \pi \end{cases}$$

$$\overline{2x = \pi} \quad ; \quad x = \frac{\pi}{2} \; ; \quad y = \frac{\pi}{2}$$

$$y = x = \frac{\pi}{2} \qquad y = x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$$

مثال :

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3} \end{cases}$$

حل :

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\cot\frac{x+y}{2}\cdot\tan\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\cot\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\frac{x-y}{2}=15^\circ$$

$$x-y=30^\circ=\frac{\pi}{6}$$

این معادله را با معادلهٔ اولی حل میکنیم :

$$x+\cancel{y}=\frac{\pi}{2}$$

$$x-\cancel{y}=\frac{\pi}{6}$$

$$2x=\frac{2}{3}\pi\quad,\quad x=\frac{\pi}{3}\quad;\quad y=\frac{\pi}{6}\ .$$

$$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}\quad;\qquad y=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$$

مثال ٤ سیستم معادلات ذیل را حل کنید ؟

$$\begin{cases}\tan x-\tan y=-2\sqrt{3}\\ x-y=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

حل : معادله 2 ، را باین شکل مینویسیم :

$$\tan(x-y)=\tan\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}=\sqrt{3}$$

$$\frac{-2\sqrt{3}}{1+\tan x\ \tan y}=\sqrt{3} \quad , \quad -2=1+\tan x\cdot\tan y$$

$$\tan x\cdot\tan y=-3$$

$$\begin{cases}\tan x\cdot\tan y=-3\\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3}\end{cases}$$

از دو معادله فوق که حاصل ضرب وتفاضل تانجانت ها است $\tan x$ و $\tan y$ را بدست آورده میتوانیم

$$\tan x=-2\sqrt{3}+\tan y$$

$$(-2\sqrt{3}+\tan y)\tan y=-3$$

$$-2\sqrt{3}\ \tan y+\tan^2 y=-3$$

$$\tan^2 y-2\sqrt{3}\ \tan y+3=0$$

$$(\tan y-\sqrt{3})^2=0$$

$$\tan y=\sqrt{3}\ , \quad \Longrightarrow \quad y=\frac{\pi}{3}$$

$$x-y=\frac{\pi}{3}$$

$$x=\frac{2\pi}{3}$$

مثال : سیستم معادلات ذیل را حل کنید؟

$$\begin{cases} x+y=\frac{7\pi}{6} \\ \tan x\cdot\tan y=0 \end{cases}$$

$$\tan x\tan y=\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\{\cos(x-y)-\cos(x+y)\}}{\frac{1}{2}\{\cos(x-y)+\cos(x+y)\}}$$

$$\tan x\tan y=\frac{\cos(x-y)-\cos\frac{7\pi}{6}}{\cos(x-y)+\cos\frac{7\pi}{6}}=0$$

$$\frac{\cos(x-y)-\cos\frac{7\pi}{6}}{\cos(x-y)+\cos\frac{7\pi}{6}}=0$$

$$\cos(x-y)-\cos\frac{7\pi}{6}=0$$

$$\cos(x-y)+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

$$\cos(x-y)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x-y=\frac{5\pi}{6}$$

$$x+y=\frac{7\pi}{6}$$

$$2x=2\pi$$

$$x=\pi$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

مثال : سیستم معادلات ذیل را حل کنید ؟

$$x - y = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\tan x}{\tan y} = -3$$

$$\frac{\tan x - \tan y}{\tan x + \tan y} = \frac{-3-1}{-3+1}$$

$$\frac{\dfrac{\sin(x-y)}{\cancel{\cos x \cos y}}}{\dfrac{\sin(x+y)}{\cancel{\cos x \cos y}}} = 2$$

$$\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)} = 2$$

$$\frac{\sin \dfrac{\pi}{2}}{\sin(x+y)} = 2$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 2\sin(x+y)$$

$$\sin(x+y) = \frac{1}{2} \Longrightarrow x + y = \frac{\pi}{6}$$

$$x + y = \frac{\pi}{6}$$

$$x - y = \frac{\pi}{2}$$

$$2x = \frac{\pi + 3\pi}{6}$$

$$2x = \frac{\overset{2}{4\pi}}{\underset{3}{6}} = \frac{2\pi}{3}$$

$x =$ [illegible] $\qquad y = -\frac{\pi}{6}$

نسبت های مثلثاتی دوچند یک زاویه ازجنس آن زاویه :

نسبت های مثلثاتی 2α را ازجنس α دریافت مینمائیم :

$$2\alpha = (\alpha + \alpha)$$

a : $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha)$

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$$

b : $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

c : $\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\alpha}$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

نسبت های مثلثاتی α ازجنس نسبت های مثلثاتی 2α :

اکنون $\sin\alpha$ ، $\cos\alpha$ ، $\tan\alpha$ را ازجنس $\cos 2\alpha$ دریافت مینمائیم :

a : $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - 1$, $2\cos^2\alpha = \cos 2\alpha + 1$

$$\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

تمرينات

سيستم معادلات ذيل را حل كنيد؟

1 : $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4} \\ \tan x + \tan y = 1 \end{cases}$

2 : $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = 2 \end{cases}$

3 : $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0 \\ \cos x \sin y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

4 : $\begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3} \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

5 : $\begin{cases} \sin(x + y) = \cos(x - y) \\ \tan x - \tan y = 1 \end{cases}$

6 : $\begin{cases} \tan x + \tan y = 1 \\ \tan(x + y) = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

7 : $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x \cos y = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$

8 : $\begin{cases} \tan x + \tan y = 1 \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

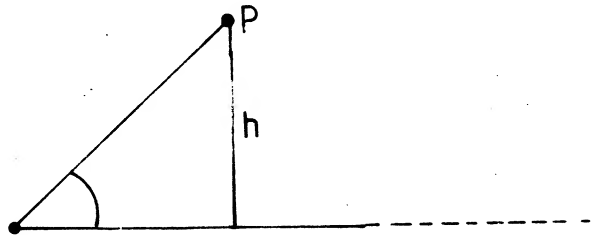
فصل هفتم

دریافت مسافه ها و ارتفاع ها

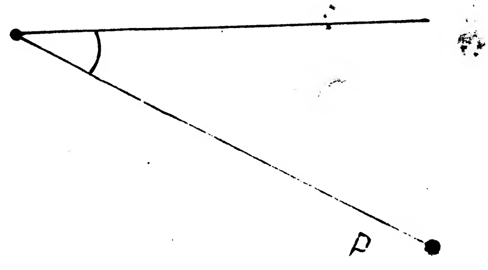
وقتی که از یک نقطه روی زمین که هموار وافقی فرض شده است یک جسم را در عین سطح بمقابل ما واقع است می بینیم . درین صورت خط دید ما افقی و یک زاویهٔ صفر را با افق می سازد



هرگاه یک جسم P در یک ارتفاع h واقع شود در اینصورت خط دید ما با افق یک زاویه را تشکیل میکند که زاویهٔ ارتفاع نامیده می شود مثلاً در شکل ذیل موضوع را مطالعه نموده میتوانیم :

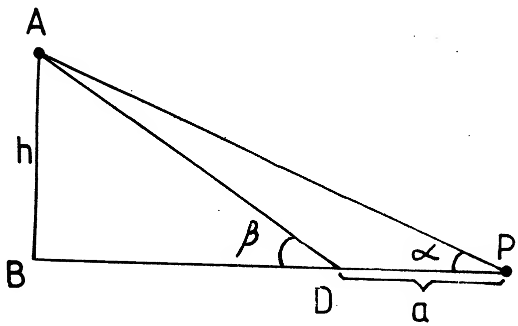


اگر جسم در یک محل پائین قرار داشته باشد در این صورت خط دید ما با جسم یک زاویهٔ نزولی را می سازد . در شکل ذیل موضوع را مطالعه مینمائیم :



تعین ارتفاع یک جسم که در فاصلهٔ دور واقع شده است :

فرضاً یکنفر مشاهد از یک نقطهٔ معین قلهٔ یک منار را مشاهده میکنند . هرگاه زاویهٔ ارتفاع را α و ارتفاع منار h باشد . اگر به اندازهٔ طول a به منار نزدیک شویم زاویهٔ ارتفاع به β تبدیل میشود . اکنون h را حساب میکنیم



حل : مشاهد در نقطه P استاده است . قلهٔ منارهٔ AB را به یک زاویهٔ α مشاهده میکند . بعد به فاصلهٔ معلوم a در نقطه D میآید و به منار نزدیک میشود زاویهٔ ارتفاع در اینجا β مشاهده میشود .

$$\sin\beta = \frac{a}{AD} \quad \cdots\cdots(1)$$

در مثلث APD با استفاده از قضیهٔ ساین میتوانیم بنویسیم :

$$\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin DAP}$$

β زاویه خارجی است لهذا :

$$\beta = \hat{\alpha} + D\hat{A}P$$

$$D\hat{A}P = \beta - \alpha$$

$$\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\frac{\sin\alpha}{AD} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{a}$$

یا

$$\frac{AD}{a} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$AD = a\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$AD = \frac{h}{\sin\beta}$$

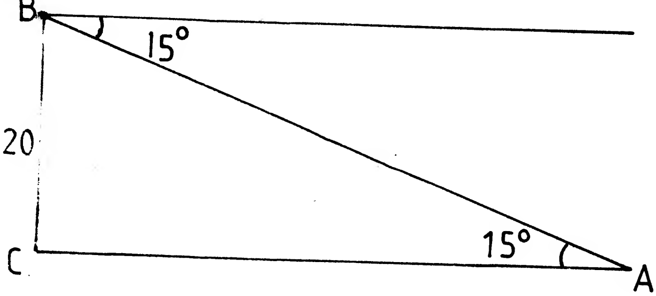
از رابطه اولی :

$$\therefore \quad \frac{a \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{h}{\sin \beta}$$

$$h = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

h ارتفاع منار است که معلوم شد زیرا طرف راست معادله یک کمیت ثابت است .

مثال : یک برج نوری 120 فت از بحر ارتفاع دارد . زاویهٔ نزولی ایکه از برج مذکور یک کشتی دیده میشود 15° است ، کشتی مذکور از برج نور کنار بحر چقدر فاصله دارد .



حل :

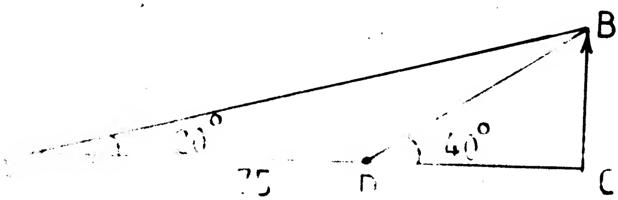
$$\cot A = \frac{AC}{BC}$$

$$\cot 15^\circ = \frac{AC}{120}$$

$$AC = 120 \cot 15^\circ$$

$$AC = 120 \times 3,7 = 444 \text{ ft}$$

مثال : ارتفاع یک درخت را معلوم کنید هرگاه زاویه ارتفاع آن از 20° به 40° تبدیل شود درصورتیکه مشاهد 75 ft بدرخت نزدیک شود .



درمثلث قایم الزاویهٔ ABC :

$$\cot A = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

$$AC = \overline{CB} \cot A$$

یا $DC + 75 = CB \cot 20^\circ$

درمثلث قایم الزاویه DBC :

$$\cot \hat{D} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$$

$$\overline{DC} = \overline{BC} \cot 40^\circ$$

$$DC = BC \cot 20^\circ - 75 = \overline{BC} \cot 40^\circ$$

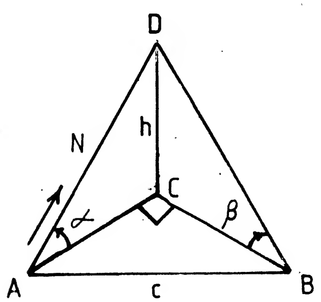
$$\overline{BC} \cot 20^\circ - 75 = BC \cot 40^\circ$$

$$\overline{BC} (\cot 20^\circ - \cot 40^\circ) = 75$$

$$\overline{BC} (2,7 - 1,2) = 75 \quad , \quad CB = \frac{75}{1,5} = 50 \text{ ft}$$

مثال : یک منار دریک زمین لیول شده طرف شمال نقطه A وغرب نقطه B که فاصلهٔ بین نقاط c میباشد، تعمیرشده است ازنقطه A قُلهٔ منار به زاویه ارتفاع α وازنقطه B قُلهٔ منار به زاویه β مشاهده شده است. ارتفاع منار رادریافت کنید؟

درمثلث ACD شکل مقابل:



$$\cot \alpha = \frac{AC}{h}$$

درمثلث BCD : $$\cot \beta = \frac{BC}{h}$$

$$AC = h \cot \alpha$$

$$BC = h \cot \beta$$

چون ABC یک مثلث قایم الزاویه است :

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2 = c^2 = h^2 (\cot\alpha)^2+h^2(\cot\beta)^2$$

$$h = \frac{c}{\sqrt{(\cos\alpha)^2+(\cot\beta)^2}}$$

مثال : یک چوب راست که 20 انچ ارتفاع دارد یک سایه افقی بطول 12,5 انچ تشکیل نموده است چه وقت روز است اگر آفتاب همان روز ۶ بجه صبح طلوع نموده و در وقت چاشت بالای چوب واقع شود .

حل :

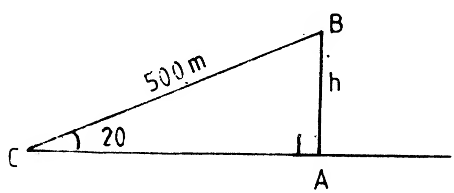
$$\tan\theta = \frac{20,0}{12,5} = 1,600$$

$$\theta = 58^\circ\ 0'$$

زمین بعد از 6 ساعت 90° را می پیماید

چون حرکت متحد الشکل است هر درجهٔ زاویه ارتفاع آفتاب به $+\frac{6}{90}$ یک ساعت یا 4 دقیقه تقابل میکند.

مثال : یک موتر فاصله 500ft را روی یک سرک طی میکند زاویهٔ میل سرک 20° میباشد . ارتفاع نقطهٔ اخیر فاصله طی شده را دریافت کنید .



$$\sin 20^\circ = \frac{h}{500}$$

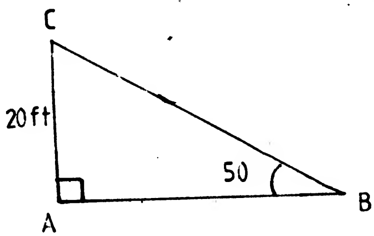
$$\frac{0,342}{1} = \frac{h}{500}$$

$$h = 0,342 \cdot 500$$

$$h = 171\ ft$$

مثال : یک درخت از قسمت بالائی توسط باد طوری شکسته که تنه درخت وقسمت شکسته آن یک مثلث قایم الزاویه را با زمین تشکیل نموده است . هرگاه قسمت شکسته درخت با زمین زاویه 50° را بسازد وقسمت تنه درخت 20 ft ارتفاع داشته باشد ارتفاع درخت رامعلوم کنید ؟

حل :



$$\sin 50 = \frac{20}{BC}$$

$$\frac{0,766}{1} = \frac{20}{BC}$$

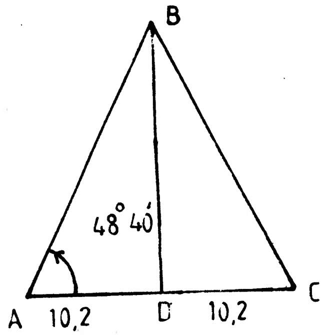
$$BC = \frac{20}{0,766} = \frac{20000}{766}$$

$$BC = 26$$

ارتفاع درخت = 46 ft = 26 ft + 20 ft

مثال : قاعدهٔ یک مثلث متساوی الساقین 20,4 ft وزوایای قاعده $48^\circ, 40'$ میباشد . طول اضلاع مساوی وارتفاع مثلث مذکور رادریافت کنید ؟

حل :



$$\frac{AB}{AD} = \sec A , \quad AB = 10,2(1,5141) = 15,4$$

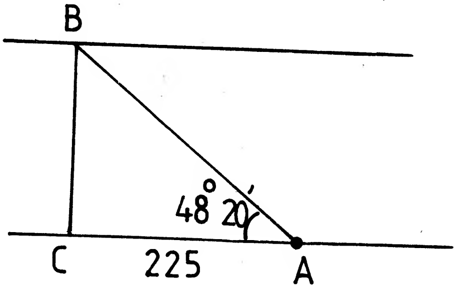
$$\frac{AD}{AB} = \cos A , \text{ یا } AB = 10,2 / 0,6604 = 15,4$$

$$\frac{DB}{AD} = \tan A \; ; DB = 10,2 \; (1,1369) = 11,6$$

دریافت عرض دریا :

مثال : یک سرویبر ترانزیت رادرکناردریا دریک نقطهٔ معین C عیاری میسازد درکنارمقابل دریا یک نقطهٔ B راتعیین ونشانی میکنند . بعدازآن ازنقطهٔ معینه بزاویه 90° یک فاصله مثلاً 225 ft

راپیش میرود . درنقطهٔ اخیر A تکرارترانزیت راعیار می سازد ونقطه نشان شدهٔ B را بزاویه $48^\circ 20'$ مشاهده میکند . عرض دریا رادریافت کنید ؟

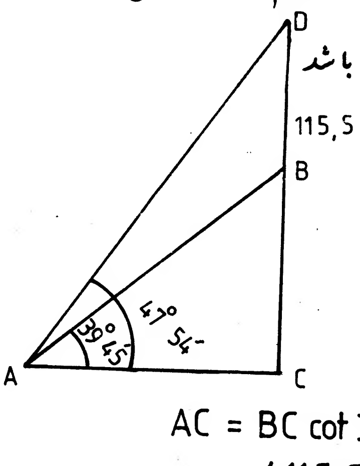


درمثلث قایم الزاویهٔ ABC

$$CB = AC \tan CAB = 225 \tan 48^\circ 20'$$

$$= 225\,(1{,}1237) = 253 \text{ ft}$$

مثال : - ازیک نقطهٔ زمین هموار . زاویه ارتفاع انجام بیرق نقطه D وقاعده بیرق نقطه B که دربالای کوه نصب شده است $47^\circ 54'$ و $39^\circ 45'$ دیده شده است . ارتفاع کوه را دریافت کنید درصورتیکه طول DB پایهٔ بیرق 115,5 فت باشد



حل : - درمثلث قایم الزاویهٔ ACD

$$AC = DC \cot 47^\circ 54' = (115{,}5 + BC) \times 0{,}9036$$

درمثلث قایم الزاویهٔ ACB :

$$AC = BC \cot 39^\circ 45' = BC\,(1{,}2024)$$

$$(115{,}5 + BC)(0{,}9036) = BC(1{,}2024)$$

$$BC = \frac{115{,}5\,(0{,}9036)}{1{,}2024 - 0{,}9036} = 349{,}3 \text{ ft}$$

تمرینات

۱ - زاویه ارتفاع پوشش یک تعمیر از یک نقطه ایکه 829 فت از پای تعمیر مذکور فاصله دارد $28^\circ 30'$ خوانده شده است . ارتفاع تعمیر را دریافت کنید ؟

۲ - زاویه ارتفاع یک کاغذپران $31^\circ 40'$ میباشد . چقدر کاغذپران مذکور ارتفاع دارد درصورتیکه 275 فت تار داده باشد .

۳ - یک بالون 539 فت درانجام یک پل ارتفاع دارد . زاویه تنزیل از بالون به انجام دیگر پل $33^\circ 10'$ خوانده شده است طول پل را دریافت کنید .

۴ - یک زینه که 30 فت ارتفاع دارد به یک کلکین اتکا داده شده است . هرگاه زاویهٔ ارتفاع زینه 65° باشد . ارتفاع کلکین را دریافت کنید ؟

۵ - یک پایهٔ بیرق بطول 200 فت ، سایهٔ افقی بطول 125 فت بروی زمین تشکیل نموده است . چه وقت است اگر آفتاب به 6 : 10 pm طلوع نموده و بوقت چاشت $12 \cdot 10'$ بجه بالای پایهٔ عمودی واقع شود .

۶ - یک چوب عمودی که 37 انچ طول دارد ، 50 انچ سایه افقی بروی زمین تشکیل نموده است چه وقت است هرگاه آفتاب 5:55pm طلوع و به ساعت چاشت 11 : 55 pm بالای چوب عمودی واقع شود .

۷ - ازسرپوشش تعمیریکه a ft ارتفاع دارد زاویه تنزیل الی پای برج تلویزیون θ خوانده شده است . از پای تعمیر زاویه ارتفاع انجام پایه تلویزیون ϕ خوانده شده است . نشان دهید که ارتفاع برج تلویزیون $h = a\tan\phi \cot\theta$ میباشد .

۸ - اثبات نمائید که ناصف عمودی وتر مثلث قایم الزاویه 30° ، 60° ، 90° ضلع قایم طویلتر را به نسبت 2 و 1 تقسیم میکند .

۹ - یک تعمیر بالای یک تپه آباد شده است . از یک نقطه روی زمین زاویه ارتفاع قاعدهٔ تعمیر وسقف بالای تعمیر 45° و 75° خوانده شده است . هرگاه ارتفاع تعمیر 50 فت باشد ارتفاع تپه را دریافت کنید ؟

۱۰ - یک بالون از نقطه A بحر بالا شده است . زاویهٔ تنزیل یک کشتی را 30° دریافت نموده است . بعد از اینکه 60 متر پائین آمده است زاویهٔ تنزیل را 60 یافته است . فاصلهٔ کشتی و نقطهٔ A را دریافت کنید ؟

b : $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

c : $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$

$\tan\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$

دریافت نسبت های مثلثاتی سه چند یک زاویه ازجنس آن زاویه :

اکنون نسبت های مثلثاتی 3α را ازجنس α دریافت میکنیم :

(1), $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha)$

$\sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha$

$\sin 3\alpha = (2\sin\alpha\cos\alpha)\cos\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha$

$\sin 3\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$

$\sin 3\alpha = 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$

$\sin 3\alpha = 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

(2), $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha)$

$\cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha$

$\cos 3\alpha = (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - (2\sin\alpha\cos\alpha)\sin\alpha$

$\cos 3\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha$

$\cos 3\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha)$

$\cos 3\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha$

تعداد طبع (۳،۰۰۰) طبع اول سال طبع ۱۳۷۱

مطبعہ افضل شریف پرنٹرز لاہور

ماخذ REFERENCES

۱- پروانی احمد مثلثات دوازدهم کابل افغانستان ۱۳۵۰ هرش

2. Heineman E. Richard, Plane Trigonometry With Tables. New Yark, McGraw-Hill Book Company 1964.

3. Peterson Gary L. Algebra and Trigonometry California Wads Worth Publishing Company 1964.

4. AYRES. Frank JR., Ph.D. First year College Mathematics. New York McGraw Hill Book Company 1958.

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha = \tan(2\alpha + \alpha)$$

$$\tan(2\alpha+\alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan 2\alpha \cdot \tan\alpha}$$

$$\tan 3\alpha = \frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1 - \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\tan\alpha}$$

$$\tan 3\alpha = \frac{\frac{2\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{\frac{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

اکنون نسبت های مثلثاتی α 4 را دریافت میکنیم :

a, $\sin 4\alpha = \sin(\alpha + 3\alpha)$

$$\sin(\alpha+3\alpha) = \sin\alpha\cos 3\alpha + \cos\alpha \sin 3\alpha$$

$$\sin(\alpha+3\alpha) = \sin\alpha(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) + \cos\alpha(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)$$

$$\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos^3\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos\alpha\cdot\sin^3\alpha$$

$$\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\cos\alpha\cdot\sin^3\alpha$$

b, $\cos 4\alpha = \cos(\alpha+3\alpha) = \cos\alpha\cos 3\alpha - \sin\alpha\sin 3\alpha$

$$\cos(\alpha+3\alpha) = \cos\alpha(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) - \sin\alpha(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)$$

$$\cos 4\alpha = 4\cos^4\alpha - 3\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha + 4\sin^4\alpha$$

$$\cos 4\alpha = 4\cos^4\alpha - 3(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 4(1-\cos^2\alpha)^2$$

$$\cos 4\alpha = 4\cos^4\alpha - 3 + 4(1 - 2\cos^2\alpha + \cos^4\alpha)$$

$$\cos 4\alpha = 4\cos^4\alpha - 3 + 4 - 8\cos^2\alpha + 4\cos^4\alpha$$

$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$$

اکنون $\tan 4\alpha$ را دریافت میکنیم :

(c) $\tan 4\alpha = \tan(\alpha + 3\alpha)$

$$\tan(\alpha + 3\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan 3\alpha}{1 - \tan\alpha \cdot \tan 3\alpha}$$

$$\tan 4\alpha = \frac{\tan\alpha + \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}}{1 - \tan\alpha \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}}$$

$$\tan 4\alpha = \frac{\dfrac{\tan\alpha - 3\tan^3\alpha + 3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}}{\dfrac{1 - 3\tan^2\alpha + \tan^4\alpha - 3\tan^2\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}}$$

$$\tan 4\alpha = \frac{4\tan\alpha - 4\tan^3\alpha}{1 - 6\tan^2\alpha + \tan^4\alpha}$$

اکنون نسبت های مثلثاتی $(\alpha + \beta + \theta)$ را دریافت مینمائیم :

(1) $\sin(\alpha + \beta + \theta) = \sin\{\alpha + (\beta + \theta)\}$

$$\sin\{\alpha + (\beta + \theta)\} = \sin\alpha\cos(\beta + \theta) + \cos\alpha\sin(\beta + \theta)$$

$$\sin(\alpha + \beta + \theta) = \sin\alpha(\cos\beta\cos\theta - \sin\beta\sin\theta) + \cos\alpha$$

$$(\sin\beta\cos\theta + \cos\beta\sin\theta)$$

$$\sin(\alpha+\beta+\theta)=\sin\alpha\cos\beta\cos\theta-\sin\alpha\sin\beta\sin\theta+\cos\alpha\sin\beta\cos\theta$$
$$+\cos\alpha\cos\beta\sin\theta$$

$$\sin(\alpha+\beta+\theta)=\sin\alpha\cos\beta\cos\theta-\sin\alpha\sin\beta\sin\theta+\cos\alpha\sin\beta\cos\theta$$
$$+\cos\alpha\cos\beta\sin\theta$$

(2) $\cos(\alpha+\beta+\theta)=\cos\{\alpha+(\beta+\theta)\}$

$$\cos\{\alpha+(\beta+\theta)\}=\cos\alpha\cos(\beta+\theta)-\sin\alpha\sin(\beta+\theta)$$

$$\cos\{\alpha+(\beta+\theta)\}=\cos\alpha(\cos\beta\cos\theta-\sin\beta\sin\theta)-\sin\alpha$$
$$(\sin\beta\cos\theta+\cos\beta\sin\theta)$$

$$\cos(\alpha+\beta+\theta)=\cos\alpha\cos\beta\cos\theta-\cos\alpha\sin\beta\sin\theta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos\theta-\sin\alpha\cos\beta\sin\theta$$

$$\cos(\alpha+\beta+\theta)=\cos\alpha\cos\beta\cos\theta-\cos\alpha\sin\beta\sin\theta-\sin\alpha\sin\beta\cos\theta$$
$$-\sin\alpha\cos\beta\sin\theta$$

$$\cos(\alpha+\beta+\theta)=\cos\alpha\cos\beta\cos\theta-\cos\alpha\sin\beta\sin\theta-\sin\alpha\sin\beta\cos\theta$$
$$-\cos\beta\sin\alpha\sin\theta$$

(3) $\tan(\alpha+\beta+\theta)=\tan\{\alpha+(\beta+\theta)\}$

$$\tan\{\alpha+(\beta+\theta)\}=\frac{\tan\alpha+\tan(\beta+\theta)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(\beta+\theta)}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\theta)=\frac{\tan\alpha+\dfrac{\tan\beta+\tan\theta}{1-\tan\beta\cdot\tan\theta}}{1-\tan\alpha\cdot\dfrac{\tan\beta+\tan\theta}{1-\tan\beta\cdot\tan\theta}}$$

$$\cos 120^\circ = -\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = -\sqrt{\frac{1-\cos 240}{1+\cos 240}} = -\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}} = -\sqrt{3}$$

چون درناحیهٔ دوم $\tan$ علامه منفی را دارد بناءً $-\sqrt{3}$ گرفته شده است

$$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

مثال اول:

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\sin 292\frac{1}{2}^\circ = -\sqrt{\frac{1-\cos 585}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\cos 225}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

مثال دوم: $\sin\theta = \frac{5}{13}$ ، $\cos\theta = \frac{3}{7}$، $\sin\frac{1}{2}\theta$ رادرکوادرانت II و $\cos\frac{1}{2}\theta$ را درکوادرانت IV دریافت نمائید.

$$\sin\frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{12}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{25}{26}}$$

$$\sin\frac{1}{2}\theta = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

$$\cos\frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1\div\frac{12}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{26}} = \frac{\sqrt{26}}{26}$$

مثال سوم:

$$\sin 60^\circ = 2\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ$$

$$\sin 60^\circ = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۳ - درصورتیکه $\sin B = \frac{8}{17}$ و $90 < B < 180^\circ$ داده شده است $\sin\frac{A}{2}$ و $\sin 2B$ را دریافت کنید ؟

۱۴ - درصورتیکه $\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{3}$, $0 < \frac{A}{2} < 90$ و $\cos\frac{A}{4}$ و $\cos A$ را دریافت کنید ؟

۱۵ - درصورتیکه $\tan 4A = \frac{4}{3}$ و $180^\circ < 4A < 270^\circ$ داده شده است : $\sin 2A$ و $\sin 8A$ را دریافت کنید ؟

۱۶ - $\sin 250^\circ$ را ازجنس $\sin 125^\circ$ بدست آرید ؟

۱۷ - $\cos 140^\circ$ را ازجنس $\sin 70^\circ$ بدست آرید ؟

۱۸ - $\sin 160^\circ$ را ازجنس $\sin 320^\circ$ بدست آرید ؟

۱۹ - تحلیل وتحقیق نمائید ؟ $\sin^2 20^\circ = \cos^2 20^\circ - \cos^2 40^\circ$

۲۰ - $\sin(-2A) = -2\sin A\cos(-A)$

۲۱ - $\sqrt{2(1-\cos 7A)} = \pm 2\sin\frac{7A}{2}$

۲۲ - $\frac{1}{2}\cos 140^\circ = -\sqrt{\frac{1+\cos 280^\circ}{8}}$

۲۳ - $\cos^2 2B = 4\sin^4 B - 4\sin^2 B + 1$

۲۴ - $\cos 4A = 4\cos^2 2A - 1$

۲۵ - $\frac{3}{4}\sin\frac{3A}{2} = \frac{3}{2}\sin\frac{3A}{4}\cdot\cos\frac{3A}{4}$

۲۶ - $\cos(-4A) = 2\cos^2 2A - 1$

۲۷ - $\frac{3}{4}\sin\frac{3A}{2} = \frac{3}{2}\sin\frac{3A}{4}\cos\frac{3A}{4}$

مطابقت ها ی اساسی مثلثات :

۱ - $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

۲ - $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$

۳ - $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \csc^2\alpha$

۴ - $\sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1$

۵ - $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$

۶ - $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

رابطه ها ی فوق مطابقت ها ی مثلثاتی میباشند. که به تمام قیمت ها ی متحول طرف چپ مساوات مساوی بطرف راست میباشند. $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ ، $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ، $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

مثال اول : $\sin^2 7B + \cos^2 7B = 1$

مثال دوم : $\sin^4 5A + 2\sin^2 A \cos^2 A + \cos^4 A = 1$

$$(\sin^2 5A + \cos^2 5A)^2 = 1 \quad , \quad 1 = 1$$

دوطرف مطابقت ها ی فوق به تمام قیمت ها ی متحول مساوی میباشند . اما بعضی اوقات بعضی افاده ها به شکل مطابقت نمی باشند مثلاً :

مثال اول : $\sin A + \cos A = 1$

حل : $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ = 1$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \neq 1$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \neq 1$$

۱۳ - $\sin B = \frac{8}{17}$ درصورتیکه $90 < B < 180^\circ$ داده شده است $\sin\frac{A}{2}$ و $\sin 2B$
را دریافت کنید؟

۱۴ - $\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{3}$ درصورتیکه $0 < \frac{A}{2} < 90$ ، $\cos\frac{A}{4}$ و $\cos A$ را
دریافت کنید؟

۱۵ - $\tan 4A = \frac{4}{3}$ درصورتیکه $180^\circ < 4A < 270^\circ$ داده شده است :
$\sin 2A$ و $\sin 8A$ را دریافت کنید؟

۱۶ - $\sin 250^\circ$ را ازجنس $\sin 125^\circ$ بدست آرید؟

۱۷ - $\cos 140^\circ$ را ازجنس $\sin 70^\circ$ بدست آرید؟

۱۸ - $\sin 160^\circ$ را ازجنس $\sin 320^\circ$ بدست آرید؟

۱۹ - تحلیل وتحقیق نمائید؟ $\sin^2 20^\circ = \cos^2 20^\circ - \cos^2 40^\circ$

۲۰ - $\sin(-2A) = -2\sin A\cos(-A)$

۲۱ - $\sqrt{2(1-\cos 7A)} = \pm 2\sin\frac{7A}{2}$

۲۲ - $\frac{1}{2}\cos 140^\circ = -\sqrt{\frac{1+\cos 280^\circ}{8}}$

۲۳ - $\cos^2 2B = 4\sin^4 B - 4\sin^2 B + 1$

۲۴ - $\cos 4A = 4\cos^2 2A - 1$

۲۵ - $\frac{3}{4}\sin\frac{3A}{2} = \frac{3}{2}\sin\frac{3A}{4}\cdot\cos\frac{3A}{4}$

۲۶ - $\cos(-4A) = 2\cos^2 2A - 1$

۲۷ - $\frac{3}{4}\sin\frac{3A}{2} = \frac{3}{2}\sin\frac{3A}{4}\cos\frac{3A}{4}$

رابطهٔ فوق مطابقت نیست بلکه یک معادله است . زیرا تنها به قیمت $\hat{A} = 90^\circ$ صدق میکند .

$$\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

یک معادله است . زیرا بیک قیمت متحول صدق میکند .

مثال دوم : اثبات نمائیدکه :

$$\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)$$

حل :

$$\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$$

$$\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)$$

مثال سوم : اثبات نمائیدکه :

$$3\cos^4\theta + 6\sin^2\theta = 3 + 3\sin^4\theta$$

حل :

$$3(1-\sin^2\theta)^2 + 6\sin^2\theta = 3 + 3\sin^4\theta$$

$$3(1-2\sin^2\theta + \sin^4\theta) + 6\sin^2\theta = 3 + 3\sin^4\theta$$

$$3 - 6\sin^2\theta + 3\sin^4\theta + 6\sin^2\theta = 3 + 3\sin^4\theta$$

$$3 + 3\sin^4\theta = 3 + 3\sin^4\theta$$

مثال چهارم : مطابقت ذیل را اثبات نمائید ؟

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$$

$$\frac{\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2}{\sin\theta(1+\cos\theta)} = \frac{\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)} = \frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= 2\csc\theta$$

مثال پنجم : مطابقت ذیل را تحقیق کنید ؟

$$\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} = \tan^2 A$$

حل:

$$1-\cos 2A=2\sin^2 A$$

$$1+\cos 2A=2\cos^2 A$$

$$\frac{2\sin^2 A}{2\cos^2 A}=\tan^2 A$$

مثال ششم: مطابقت ذیل را تحقیق مینمائیم:

$$\frac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\tan\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}$$

حل:

$$=\frac{1-\cos A+\cos B-\cos A\cos B+\sin A\sin B}{1+\cos A-\cos B-\cos A\cos B+\sin A\sin B}$$

$$=\frac{(1-\cos A)+\cos B(1-\cos A)+\sin A\sin B}{(1+\cos A)-\cos B(1+\cos B)+\sin A\sin A}$$

$$=\frac{(1+\cos B)(1-\cos A)+\sin A\sin B}{(1+\cos A)(1-\cos B)+\sin A\sin B}$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{B}{2}\cdot 2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot 2\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}\cdot 2\sin^2\frac{B}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2})}{4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}(\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2})}$$

$$=\tan\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}$$

مثال هفتم:

$$\frac{\cot\beta-1}{\cot\beta+1}=\frac{1-\tan\beta}{1+\tan\beta}$$

حل:

$$\frac{\cot\beta - 1}{\cot\beta + 1} = \frac{\frac{\cos\beta}{\sin\beta} - 1}{\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + 1} = \frac{\cos\beta - \sin\beta}{\cos\beta + \sin\beta}$$

صورت ومخرج را به $\cos\beta$ تقسیم مینمائیم

$$= \frac{1 - \tan\beta}{1 + \tan\beta}$$

تمرینات:

۱ ـ نسبت های مثلثاتی $22,5^\circ$ را دریافت کنید؟

۲ ـ نسبت های مثلثاتی 15° را دریافت نمائید؟

۳ ـ مطابقت ذیل را اثبات نمائید

$$\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin A\cos B - \sin B\cos B} = \tan(A + B)$$

۴ ـ $\frac{\cos A}{1 - \sin A} = \tan\left(45 + \frac{A}{2}\right)$

۵ ـ $\tan(45 + \theta) - \tan(45 - \theta) = 2\tan 2\theta$

۶ ـ $\frac{1 + \sin\theta - \cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$

۷ ـ $\sin\alpha\sin(60 - \alpha)\cdot\sin(60 + \alpha) = \frac{1}{2}\sin^3\alpha$

۸ ـ $\cos\alpha\cdot\cos(60 - \alpha)\cdot\cos(60 + \alpha) = \frac{1}{4}\sin^3\alpha$

۹ ـ $\frac{\cos 2A + \cos A + 1}{\sin 2A + \sin A} = \cot A$

۱۰ ـ $\frac{\sin(n+1)A - \sin(n-1)A}{\cos(n+1)A + 2\cos nA + \cos(n-1)A} = \tan\frac{A}{2}$

۱۱ - $$\frac{\sin(n+1)A + 2\sin(nA) + \sin(n-1)A}{\cos(n-1)A - \cos(n+1)A} = \cot\frac{A}{2}$$

قیمت افاده های مثلثاتی ذیل رابنویسید؟

۱ - $\cos^2 6\alpha - \sin^2 6\alpha$

۲ - $2\sin 5x \cdot \cos 5x$

۳ - $\dfrac{2\tan 3x}{1-\tan^2 3x}$

۴ - $\dfrac{1-\cos 6x}{2}$

۵ - $\sqrt{\dfrac{1-\cos 8y}{1+\cos 8y}}$

۶ - $2\sin\dfrac{x}{3} \cdot \cos\dfrac{x}{3}$

۷ - $\sin 4x \cdot \cos 4x$

۸ - $\dfrac{2\tan 2x}{\tan^2 2x - 1}$

۹ - $\dfrac{1-\cos 10x}{2}$

۱۰ - $2\sin 6x \cos 6x$

۱۱ - $\cos 20\theta$ رازجنس $\sin 5\theta$ دریافت نمائید؟

۱۲ - نسبت های مثلثاتی 2α رادریافت کنید درصورتیکه :

الف : $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$

ب : $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$

ج : $\tan\alpha = \dfrac{16}{63}$

۱۳ - مطابقت $\dfrac{1}{\csc\theta + 2 + \sin\theta} = \dfrac{\sin\theta}{(1+\sin\theta)^2}$ رابه قیمت $\theta = 30^\circ$ تحقیق نمائید .

۱۴ - مطابقت $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$ را به قیمت $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ تحقیق نمائید .

۱۵ - نسبت های مثلثاتی 2α را دریافت کنید درصورتیکه :

الف : $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$

ب : $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$

ج : $\tan\alpha = \dfrac{5}{12}$

۱٦ - $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ در کوادرنت اول داده شده است . دیگر نسبت های مثلثاتی α را دریافت کنید .

به همین قسم کمیات وضعیه تمام نقاط ازجنس توابع مثلثاتی ساین وکوساین در نقاط مربوطه بروی دایرهٔ مثلثاتی درشکل (۱) نشان داده شده است .

درشکل بوضاحت دیده میشود که مثلث های $P_3 O P_1$ و $P_4 O P_2$ انطباق پذیراند.

بنابرین: $\overline{P_3P_1} = \overline{P_4P_2}$ میباشد . اکنون فاصله های P_3P_1 و P_4P_2 رادریافت نموده مساوی قرارمیدهیم :

$$(P_3P_1)^2 = [\cos A - \cos(-B)]^2 + [\sin A - \sin(-B)]^2$$

چون $\cos(-B) = \cos B$ و $\sin(-B) = -\sin B$ است

$$(P_3P_1)^2 = (\cos A - \cos B)^2 + (\sin A + \sin B)^2$$

$$(P_3P_1)^2 = \cos^2 A - 2\cos A\cos B + \cos^2 B + \sin^2 A + 2\sin A\sin B$$
$$+ \sin^2 B$$

$$(P_3P_1)^2 = 2 - 2\cos A\cos B + 2\sin A\sin B$$

همچنان :

$$(P_4P_2)^2 = [\cos(A+B) - 1]^2 + [\sin(A+B) - 0]^2$$

$$(P_4P_2)^2 = \cos^2(A+B) + 1 - 2\cos(A+B) + \sin^2(A+B)$$

$$\sin^2(A+B) + \cos^2(A+B) = 1$$

$$\therefore (P_4P_2)^2 = 1 + 1 - 2\cos(A+B)$$

$$(P_4P_2)^2 = 2 - 2\cos(A+B)$$

چون $(P_3P_1)^2 = (P_4P_2)^2$

$$\therefore \cancel{2} - 2\cos A\cos B + 2\sin A\sin B = \cancel{2} - 2\cos(A+B)$$

اطراف را به -2 تقسیم مینمائیم :

فصل دوم

تبدیل مجموع و تفاضل نسبت های مثلثاتی دو زاویه بحاصل ضرب آن ؛

اگر P مجموعه دو زاویهٔ معلومهٔ و Q تفاضل آن دو زاویه معلومه باشد .

$$P = \alpha + \beta$$

$$Q = \alpha - \beta$$

اثبات مینمائیم که :

I- $\sin P + \sin Q = 2\sin\frac{P+Q}{2}\cos\frac{P-Q}{2}$

II- $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$

III- $\cos P + \cos Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\cos\frac{P-Q}{2}$

IV- $\cos P - \cos Q = -2\sin\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$

$$= 2\sin\frac{P+Q}{2}\sin\frac{Q-P}{2}$$

V- $\tan P + \tan Q = \frac{\sin(P+Q)}{\cos P\cos Q}$

VI- $\tan P - \tan Q = \frac{\sin(P-Q)}{\cos P\cos Q}$

VII- $\cot P + \cot Q = \frac{\sin(P+Q)}{\sin P\sin Q}$

VIII- $\cot P - \cot Q = \frac{\sin(Q-P)}{\sin P\sin Q}$

اکنون فارمول‌های فوق را یک به یک تحقیق و اثبات مینمائیم :

I

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

طرف بطرف جمع میکنیم :

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\alpha+\beta = P \qquad \alpha = \frac{P+Q}{2}$$

$$\alpha-\beta = Q$$

$$2\alpha = P+Q \qquad \beta = \frac{P-Q}{2}$$

اکنون قیمت‌های α و β را ازجنس P و Q تعویض مینمائیم :

$$\sin P + \sin Q = 2\sin\frac{P+Q}{2}\cos\frac{P-Q}{2} \qquad \text{I}$$

همچنان برای بدست آوردن تفاضل آن چنین عمل مینمائیم :

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\underset{-}{}\sin(\alpha-\beta) = \underset{-}{\sin\alpha\cos\beta} \underset{+}{-} \cos\alpha\sin\beta$$

طرف بطرف منفی میکنیم :

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2} \qquad \text{II}$$

اکنون مجموعه و تفاضل کوساین‌های دوزاویه α و β را دریافت مینمائیم :

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

طرف به طرف جمع میکنیم :

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

قیمت های α و β رازجنس P و Q تعویض مینمائیم :

$$\cos P + \cos Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\cos\frac{P-Q}{2} \quad \ldots\ldots \text{III}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\underset{-}{}\cos(\alpha-\beta) = \underset{-}{}\cos\alpha\cos\beta \underset{-}{+}\sin\alpha\sin\beta$$

طرف بطرف منفی میکنیم :

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$

قیمت های α و β رازجنس P و Q تعویض مینمائیم :

$$\cos P - \cos Q = -2\sin\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$$

$$\cos P - \cos Q = 2\sin\frac{P+Q}{2}\sin\frac{Q-P}{2}. \quad \ldots\ldots \text{IV}$$

اکنون مجموع وتفاضل tan دوزاویه α و β رادریافت مینمائیم :

$$\tan P + \tan Q = \frac{\sin P}{\cos P} + \frac{\sin Q}{\cos Q} = \frac{\sin P\cos Q + \cos P\sin Q}{\cos P\cos Q}$$

$$\tan P + \tan Q = \frac{\sin(P+Q)}{\cos P\cos Q} \quad \ldots\ldots \text{V}$$

$$\tan P - \tan Q = \frac{\sin P}{\cos P} - \frac{\sin Q}{\cos Q} = \frac{\sin P\cos Q - \cos P\sin Q}{\cos P\cos Q}$$

$$\tan P - \tan Q = \frac{\sin(P-Q)}{\cos P\cos Q} \quad \ldots\ldots \text{VI}$$

$$\cot P + \cot Q = \frac{\cos P}{\sin P} + \frac{\cos Q}{\sin Q} = \frac{\cos P\sin Q + \sin P\cos Q}{\sin P\sin Q}$$

$$\cot P + \cot Q = \frac{\sin(P+Q)}{\sin P\sin Q}$$

$$\cot P - \cot Q = \frac{\cos P}{\sin P} - \frac{\cos Q}{\sin Q}$$

$$\cot P - \cot Q = \frac{\cos P \sin Q - \sin P \cos Q}{\sin P \sin Q}$$

$$\cot P - \cot Q = \frac{\sin(Q - P)}{\sin P \sin Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{VII}$$

مسئله : قیمت $\tan P + \cot P$ را دریافت مینمائیم :

$$\tan P + \cot P = \frac{\sin P}{\cos P} + \frac{\cos P}{\sin P}$$

$$\tan P + \cot P = \frac{\sin^2 P + \cos^2 P}{\cos P \sin P} = \frac{1}{\cos P \sin P}$$

$$\tan P + \cot P = \frac{2}{2 \sin P \cos P} = \frac{2}{\sin 2P}$$

$$\tan P + \cot P = 2 \csc P$$

حاصل ضرب نسبت های مثلثاتی دوزاویه ازجنس نسبت های مثلثاتی مجموع وتفاضل دوزاویه مذکور :

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left\{ \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \right\}$$

$$\cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left\{ \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) \right\}$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left\{ \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \right\}$$

$$\sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}\left\{ \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) \right\}$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left\{ \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) \right\}$$

مثال:

مطابقت ذیل را تحقیق نمائید؟

$$\frac{\sin 7\theta + \sin 3\theta}{\cos 7\theta + \cos 3\theta} = \tan 5\theta$$

ازین فارمول استفاده نموده مجموع را به حاصل ضرب تبدیل مینمائیم.

$$\sin P + \sin Q = 2\sin\frac{P+Q}{2}\cos\frac{P-Q}{2}$$

$$\frac{2\sin\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}{2\cos\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}} = \frac{\sin 5\theta\cos 2\theta}{\cos 5\theta\cos 2\theta}$$

$$= \tan 5\theta$$

مثال اول: به اثبات میرسانیم که:

$$\frac{\cos 3x - \cos 5x}{\sin 3x + \sin 5x} = \tan x$$

از فارمول IV و فارمول I استفاده مینمائیم:

$$\frac{2\sin 4x \cdot \sin x}{2\sin 4x\cos x} = \tan x$$

مثال دوم: مطابقت ذیل را تحقیق مینمائیم:

$$\cos 50^\circ + \sin 20^\circ = \cos 10^\circ$$

$$\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = \cos 10^\circ$$

$$2\sin\frac{40+20}{2}\cos\frac{40-20}{2} = \cos 10$$

$$2\sin 30^\circ \cdot \cos 10^\circ = \cos 10^\circ$$

$$2\cdot\frac{1}{2}\cos 10^\circ = \cos 10^\circ$$

$$\cos 10^\circ = \cos 10^\circ$$

مثال سوم : مطابقت ذیل را باثبات میرسانیم که :

$$\frac{\sin 7\theta - \sin 3\theta}{\cos 7\theta + \cos 3\theta} = \tan 2\theta$$

$$= \frac{2\cos\frac{7\theta + 3\theta}{2}\sin\frac{7\theta - 3\theta}{2}}{2\cos\frac{7\theta + 3\theta}{2}\cos\frac{7\theta - 3\theta}{2}} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta$$

مثال چهارم :

$$\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{2\cos\frac{75+15}{2}\sin\frac{75-15}{2}}{+2\cos\frac{75+15}{2}\cos\frac{75-15}{2}} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

مثال پنجم : افاده های ضربی ذیل را بشکل مجموع و تفاضل آنها تبدیل نمائید ؟

(a) $\sin 40^\circ \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\left\{\sin(40^\circ + 30^\circ) + \sin(40^\circ - 30^\circ)\right\}$

$= \frac{1}{2}\left\{\sin 70 + \sin 10\right\}$

(b) $\cos 110^\circ \sin 55^\circ = \frac{1}{2}\left\{\sin(110^\circ + 55^\circ) - \sin(110^\circ - 55^\circ)\right\} = \frac{1}{2}(\sin 165^\circ - \sin 55^\circ)$

$\cos 50^\circ \cos 35^\circ = \frac{1}{2}\left\{\cos(50^\circ + 35^\circ) + \cos(50^\circ - 35^\circ)\right\}$

$= \frac{1}{2}(\cos 85^\circ + \cos 15^\circ)$

مثال ششم : اثبات نمائید که :

$$\cos^3 x \sin^2 x = \frac{1}{16}(2\cos x - \cos 3x - \cos 5x)$$

ثبوت :

$$\cos^3 x \sin^2 x = (\sin x \cos x)^2 \cos x$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x \cos x = \frac{1}{4} (\sin 2x)(\sin 2x \cos x)$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x \left\{ \frac{1}{2} (\sin 3x + \sin x) \right\} = \frac{1}{8} (\sin 3x \sin 2x$$

$$+ \sin 2x \sin x)$$

$$= \frac{1}{8} \left[-\frac{1}{2} (\cos 5x - \cos x) + \left\{ -\frac{1}{2} (\cos 3x - \cos x) \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{16} (2 \cos x - \cos 3x - \cos 5x)$$

مثال هفتم: اثبات نمائید که:

$$1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x$$

$$= 4 \cos x \cos 2x \cos 3x$$

$$1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 1 + (\cos 2x + \cos 4x) + \cos 6x$$

$$= 1 + 2 \cos 3x \cos x + \cos 6x = (1 + \cos 6x) + 2 \cos 3x \cos x$$

$$= 2 \cos^2 3x + 2 \cos 3x \cos x = 2 \cos 3x (\cos 3x + \cos x)$$

$$= 2 \cos 3x (2 \cos 2x \cos x) = 4 \cos x \cos 2x \cos 3x$$

تمرینات:

I - افاده‌های ضربی مثلثاتی ذیل را بحاصل جمع و تفاضل معادل آن تبدیل نمائید؟

a_ $4 \sin 8\theta \cos 4\theta$

b_ $8 \sin 7\theta \sin 5\theta$

c_ $\sin 134^\circ \cdot \cos 100^\circ$

d_ $12 \cos 2\theta \cos 5\theta$

۲ - هریک از افادهٔ مثلثاتی ذیل را بحاصل ضرب معادل آن تبدیل نمائید ؟

a_ $\sin B - \sin(B - 100^\circ)$

b_ $\cos 5\theta - \cos 3\theta$

c_ $\sin 17A + \sin 13A$

d_ $\cos 65^\circ + \sin 85^\circ$

۳ - مطابقت های ذیل را اثبات نمائید ؟

a- $$\frac{\sin 4\theta + \sin 2\theta}{\sin 10\theta - \sin 4\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos 7\theta}$$

b- $$\frac{\sin 40^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 220 - \cos 200} = \sqrt{3}$$

c- $$\frac{\cos 8\theta - \cos 4\theta}{\cos 5\theta + \cos 7\theta} = -2\sin\theta\tan 6$$

d- $$\cos 50^\circ + \sin 20^\circ = \cos 10^\circ$$

e- $$\sin 2\theta - \sin 4\theta + \sin 6\theta = 4\sin\theta\cos 2\theta\cos 3\theta$$

f- $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ داده شده است . اثبات نمائید که

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$$

g- $$\frac{\sin A + \cos 2A - 1}{\cos A - \sin 2A} = \tan A$$

h- $$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

i- $$\frac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin 2B + \sin 2A} = \tan(A - B)$$

j- $$4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \sin A - \sin B + \sin C$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$ -k

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1=\cos A+\cos B-\cos C$$ -l

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$ -m

به اطراف جواب های صحیح خط بگیرید ؟

$$\sin\alpha+\sin\beta=?$$

(a) $2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, (b) $2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

(c) $2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, (d) $2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$\sin A-\sin B=?$$

(a) $2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$, (b) $2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

(c) $2\cos\frac{A-B}{2}\cdot\sin\frac{A+B}{2}$, (d) $2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$$\cos P+\cos Q=?$$

(a) $2\cos\frac{P+Q}{2}\cos\frac{P-Q}{2}$, (b) $2\sin\frac{P-Q}{2}\cos\frac{P+Q}{2}$

(c) $2\sin\frac{P+Q}{2}\cos\frac{P+Q}{2}$, (d) $2\sin\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$

$$\cos P-\cos Q=?$$

(a) $-2\sin\frac{P-Q}{2}\sin\frac{P+Q}{2}$, (b) $2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$

(c) $2\sin\frac{P-Q}{2}\sin\frac{P+Q}{2}$, (d) $2\cos\frac{P-Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$

$$\tan P + \tan Q = ?$$

a: $\dfrac{\sin(P+Q)}{\cos P \cos Q}$, b: $\dfrac{\sin(P-Q)}{\cos P \cos Q}$, c: $\dfrac{\sin(P-Q)}{\sin P \sin Q}$, d: $\dfrac{\sin(P+Q)}{\sin P \sin Q}$

$$\tan P - \tan Q = ?$$

a: $\dfrac{\sin(P+Q)}{\cos P \cos Q}$, b: $\dfrac{\sin(P-Q)}{\cos P \cos Q}$, c: $\dfrac{\sin(P+Q)}{\cos P \sin Q}$, d: $\dfrac{\cos(P+Q)}{\sin P \sin Q}$

$$\boxed{\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{I}$$

اکنون قیمت $\cos(A-B)$ را در یافت مینمائیم.

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

ثبوت : فارمول (I) را بالای دو زاویهٔ A و $-B$ تطبیق مینمائیم :

$$\cos[A+(-B)] = \cos A\cos(-B) - \sin A\sin(-B)$$

$$\boxed{\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{II}$$

اکنون قیمت $\sin(A+B)$ را دریافت میکنیم :

قضیه : $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

ثبوت : $\sin(A+B) = \cos[90^\circ-(A+B)]$

$$\sin(A+B) = \cos[(90^\circ-A)-B]$$

$$\sin(A+B) = \cos(90^\circ-A)\cos B + \sin(90^\circ-A)\sin B$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(90^\circ-A) = \sin A\\ \sin(90-A) = \cos A\end{array}\right\}$$

$$\boxed{\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{III}$$

اکنون قیمت $\sin(A-B)$ را دریافت مینمائیم :

فارمول III را بالای دو زاویه A و $-B$ تطبیق مینمائیم :

$$\sin[A+(-B)] = \sin A\cos(-B) + \cos A\sin(-B)$$

$$\cos(-B) = \cos B \text{ ، } \sin(-B) = -\sin B$$

$$\therefore \sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

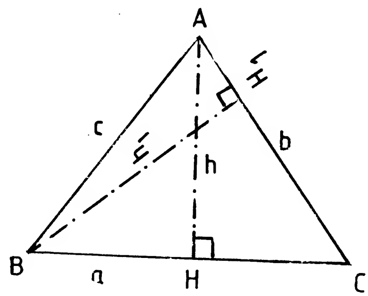
فصل سوم

مطالعه روابط بین اضلاع و زوایای یک مثلث :

قضیه ساین : درهر مثلث ABC که دارای زوایای A ، B ، C وطول اضلاع a ، b ، c و R شعاع دایره محیطی باشد . بین اضلاع و زوایای آن روابط ذیل موجود است .

(1) $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

(2) $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



ثبوت : در مثلث کیفی ABC که دارای طول اضلاع a ، b ، c میباشد ارتفاع AH و BH_1 را رسم مینمائیم ومیتوانیم روابط ذیل رابنویسیم :

$$\sin B=\frac{h}{c}$$

$$h=c\sin B\ ,\quad \sin C=\frac{h}{b}\ ,\quad h=b\sin C$$

$$\therefore\ c\sin B=b\sin C\ ,\quad \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\ \cdots\cdots\ (i)$$

هرگاه ارتفاع BH_1 را درنظر بگیریم :

$$\sin A=\frac{h_1}{c}\ ,\quad h_1=c\sin A$$

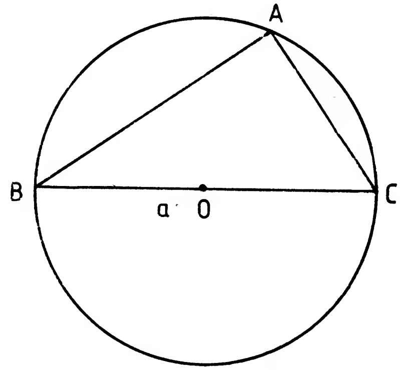
$$\sin C=\frac{h_1}{a}\ ,\quad h_1=a\sin c$$

$$c\sin A=a\sin c\ ,\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\ \cdots\cdots\cdots\ (ii)$$

ازمقایسه روابط (i) و (ii) چنین رابطهٔ نتیجه بدست میآید :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

اکنون رابطهٔ فوق را دریک مثلث قایم الزاویه که دارای دایرهٔ محیطی باشد تطبیق مینمائیم :

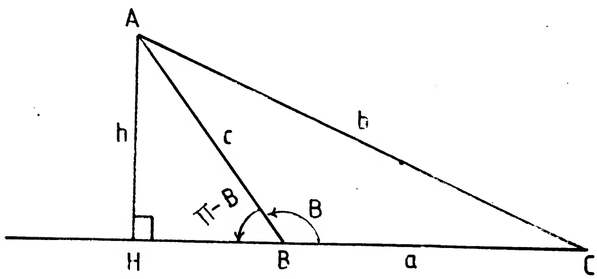


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{2R}{1}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

R . شعاع دایره محیطی این مثلث میباشد .

تحقیق وتطبیق رابطه $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ **دریک مثلث منفرج الزاویه :** در مثلث منفرج الزاویه ABC زاویه B منفرجه است . ارتفاع h را ازرأس A به ضلع مقابل رسم میکنیم



$$\sin(\pi - B) = \frac{h}{c}$$

$$\sin(\pi - B) = \sin B$$

$$\therefore \sin B = \frac{h}{c}$$

$$h = c \sin B$$

درمثلث قایم الزاویه AHC

$$\sin C = \frac{h}{b}, \quad h = b \sin C$$

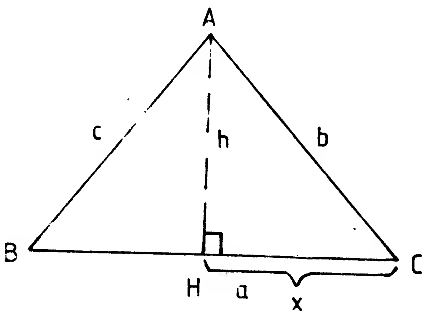
$b \sin C = c \sin B$ یا $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

هرگاه یک ارتفاع دیگر این مثلث را رسم نمائیم بالنتیجه رابطهٔ

تحقیق وتطبیق میشود .

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

قضیه کوساین: درهر مثلث ABC رابطهٔ ذیل بین اضلاع و زوایای آن مثلث موجود دارد.



$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

ثبوت: درمثلث حادة الزاویه ABC میتوانیم بنویسیم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

یکی از سه رابطه فوق را اثبات می نمائیم.

$$c^2 = \overline{BH}^2 + h^2 = (a - x)^2 + h^2$$

$$c^2 = a^2 - 2ax + \underbrace{x^2 + h^2}_{b^2}$$

$$x = b \cos c$$

$$x^2 + h^2 = b^2$$

$$\therefore c^2 = a^2 - ab \cos c + b^2$$

از روابط فوق $\cos A$ ، $\cos B$ ، $\cos C$ رادریافت مینمائیم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$c^2 = a^2 - 2ab \cos C + b^2$$

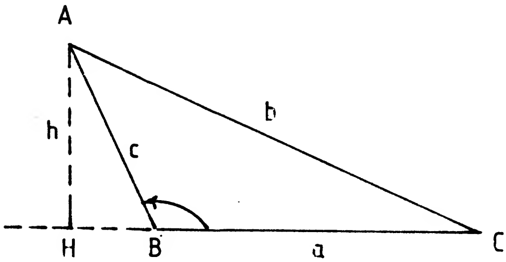
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

باستفاده از رابطهٔ فوق میتوانیم cos B و cos C را دریافت نمائیم :

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \qquad \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

رابطهٔ فوق را در یک مثلث منفرج الزاویه

تطبیق و تحقیق مینمائیم :



نظر به قضایای گذشته مربع ضلع مقابل زاویه

منفرجه عبارت است از :

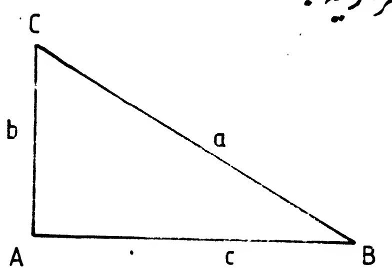
$$b^2 = a^2 + c^2 + 2a \cdot HB$$

$$\cos B = -\cos(\pi - B)$$

$$= -\frac{\overline{HB}}{c}, \quad \overline{HB} = -c\cos B$$

$$\therefore\ b^2 = a^2 + c^2 + 2a(-c\cos B), \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

تطبیق و تحقیق رابطهٔ فوق در یک مثلث قایم الزاویه :



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

باساس قضیهٔ پیتاگورث درین مثلث قایم الزاویه

ABC میتوانیم بنویسیم :

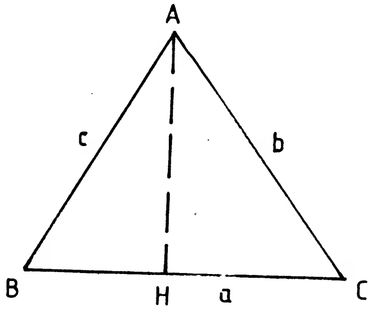
$$a^2 = b^2 + c^2$$

چون $\hat{A} = 90^\circ$ است لهذا $\cos A = 0$ بوده بالنتیجه $2bc\cos A = 0$ شده

رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ را بعوض رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ میتوانیم

بنویسیم .

قضیه : درهر مثلث ABC روابط ذیل موجود است :



$$\begin{cases} a = c\cos B + b\cos C \\ b = c\cos A + a\cos C \\ c = a\cos B + b\cos A \end{cases}$$

ثبوت : درمثلث قایم الزاویه HAB داریم :

$$\cos B = \frac{BH}{c} \quad , \quad BH = c\cos B$$

همچنان درمثلث قایم الزاویهٔ HAC داریم :

$$\cos C = \frac{HC}{b} \quad , \quad HC = b\cos C$$

دو رابطهٔ فوق راطرف به طرف جمع میکنیم :

$$BH + HC = c\cos B + b\cos C$$

$$a = c\cos B + b\cos C$$

باساس رابطهٔ فوق دورابطهٔ دیگررا می نویسیم :

$$b = c\cos A + a\cos C$$

$$c = a\cos B + b\cos A$$

قضیه : دریک مثلث بین اضلاع وزوایای آن روابط ذیل موجوداست .

(i) $$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

(ii) $$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

(iii) $$\tan\frac{A-C}{2} = \frac{a-c}{a+c}\cot\frac{B}{2}$$

ثبوت : اثبات مینمائیم که:

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$ .... (قضیه sin)

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}$$

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$ ... (فورمول های ضرب)

$$\frac{a-b}{a+b}=\cot\frac{A+B}{2}\cdot\tan\frac{A-B}{2}$$

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{1}{\tan\frac{A+B}{2}}\cdot\tan\frac{A-B}{2}$$

$$\frac{a-b}{a+b}\cdot\tan\frac{A+B}{2}=\tan\frac{A-B}{2}$$

در هر مثلث ABC رابطهٔ ذیل وجود دارد:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$

$$\hat{A}+\hat{B}=180^\circ-\hat{C}$$

$$\frac{A+B}{2}=90-\frac{C}{2}$$

$$\tan\frac{A+B}{2}=\tan\left(90-\frac{C}{2}\right)$$

$$\tan\frac{A+B}{2}=\cot\frac{C}{2}$$

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

به این قسم دو رابطهٔ دیگر را اثبات نموده میتوانیم :

قضیه : درهرمثلث رابطهٔ ذیل صدق میکند

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

ثبوت : نظر به قضیهٔ sin وخواص تناسب داریم که :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\hat{A}+\hat{B}=180^\circ-\hat{C}$$

$$\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\left(90^\circ-\frac{\hat{C}}{2}\right)$$

$$\sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\sin\left(90^\circ-\frac{\hat{C}}{2}\right)$$

$$\sin\left(90^\circ-\frac{\hat{C}}{2}\right)=\cos\frac{\hat{C}}{2}$$

$$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

قضیه :

رابطهٔ ذیل دریک مثلث صدق می نماید :

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}$$

ثبوت :

$$\frac{a-b}{\sin A - \sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin C}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{2\cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}}{\sin C}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\not{2}\cos \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}}{\not{2}\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

چون $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$ میباشد بناءً

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}$$

دو رابطهٔ فوق بنام فارمول های (Mollwied) یادمیشود .

دریافت نسبت های مثلثاتی نصف یک زاویه یک مثلث از جنس طول اضلاع آن مثلث :

اولاً $\sin\frac{A}{2}$ ، $\sin\frac{B}{2}$ ، $\sin\frac{C}{2}$ را از جنس طول اضلاع مثلث که a ، b ، c داده شده چنین دریافت می نمائیم :

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{bc}}$$

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(P-a)(P-c)}{ac}}$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(P-a)(P-b)}{ab}}$$

برای ثبوت رابطهٔ اول میتوانیم بنویسیم که :

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}}{2}}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a-b+c)}{4bc}}$$

هرگاه $a+b+c=2P$ قرار دهیم در این صورت :

$$a+b+c-2b=2P-2b$$

$$a+c-b=2(P-b)$$

وهمچنان :

$$a+b+c=2P$$

$$a+b+c-2c=2P-2c$$

$$a+b-c=2(P-c)$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2\cdot(P-b)\,2\cdot(P-c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{bc}}$$

$$\therefore\ \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{bc}}$$

به این قسم میتوانیم $\sin\frac{B}{2}$ ، $\sin\frac{C}{2}$ را بدست آریم :

دریافت نسبت های مثلثاتی $\cos\frac{A}{2}$ ، $\cos\frac{B}{2}$ و $\cos\frac{C}{2}$ را از جنس طول اضلاع مثلث :

$$\begin{cases}\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{P(P-a)}{bc}}\\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{P(P-b)}{ac}}\\ \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{P(P-c)}{ab}}\end{cases}$$

ثبوت رابطه اول :

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}}{2}}$$

طریقه دوم :

نسبت های مثلثاتی مجموعهٔ دو زاویه α و β :

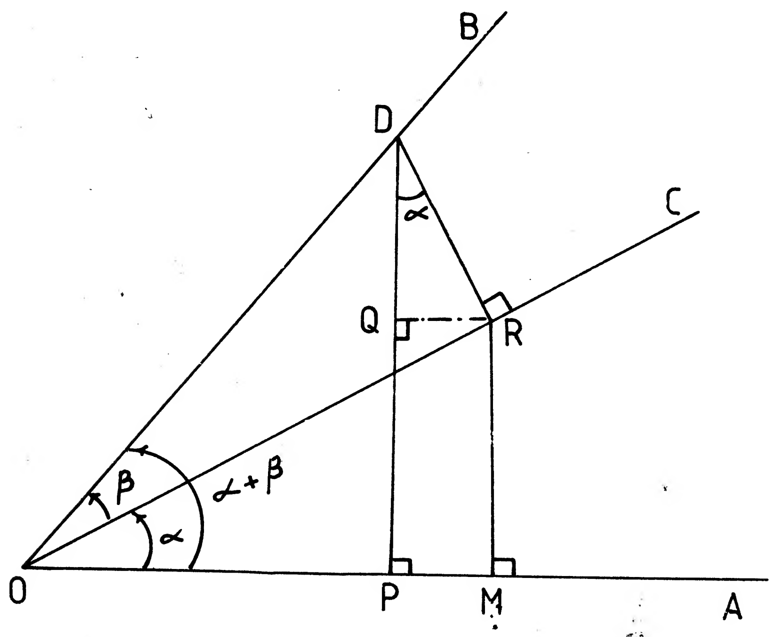
$$1:\quad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$2:\quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$3:\quad \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

قضیه : ساین مجموعه دو زاویه معلومه α و β عبارت است از:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$



شکل (1)

ثبوت : $\hat{AOC}=\alpha$ ، $\hat{COB}=\beta$ ، $\hat{AOB}=(\alpha+\beta)$ نشان داده شده اند. از نقطه D عمود های $\overline{DP}$ و $\overline{DR}$ را بالای شعاع های $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}$ رسم میکنیم.

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c+a)}{4bc}}$$

$$a+b+c=2P\ ,\quad a+b+c-2a=2P-2a$$

$$b+c-a=2(P-a)$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2P\times2(P-a)}{4bc}}=\sqrt{\frac{P(P-a)}{bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{P(P-a)}{bc}}$$

به این قسم $\cos\frac{B}{2}$ ، $\cos\frac{C}{2}$ را دریافت می نمائیم :

اکنون tan نصف یک زاویه یک مثلث را دریافت مینمائیم :

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{(P-b)(P-c)}{bc}}{\sqrt{\frac{P(P-a)}{bc}}}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\frac{(P-b)(P-c)}{bc}}{\frac{P(P-a)}{bc}}}=\sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{P(P-a)}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{P(P-a)}}$$

به این قسم $\tan\frac{B}{2}$ و $\tan\frac{C}{2}$ را دریافت می نمائیم .

اکنون $\sin A$ ، $\sin B$ و $\sin C$ را با استفاده از فارمول های فوق دریافت مینمائیم :

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$\sin A = 2\sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{P(P-a)}{bc}}$$

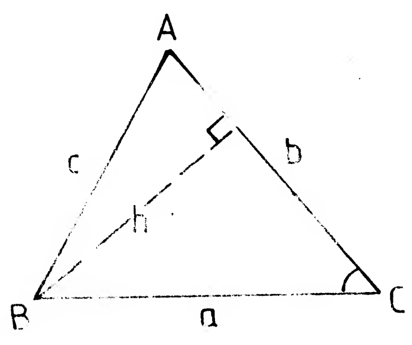
$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$\sin B = \frac{2}{ac}\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

دریافت مساحت مثلث ABC از جنس طول اضلاع آن :

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$



$$\sin A = \frac{h}{c}$$

$$h = C\sin A$$

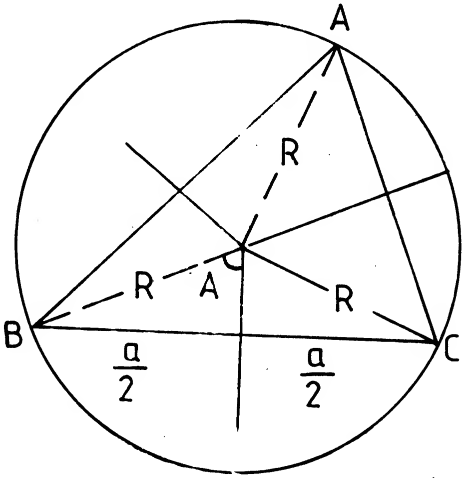
مساحت مثلث $S = \frac{1}{2}\,b\cdot h$

$$S = \frac{1}{2}\,b\cdot c\,\sin A$$

$$S = \frac{1}{2}\,bc\cdot\frac{2}{bc}\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

مساحت مثلث ABC $S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$

دریافت شعاع دایرهٔ محیطی مثلث :



مثلث ABC را که دارای طول اضلاع a ، b و c میباشد درنظر میگیریم . دایرهٔ محیطی آن را رسم میکنیم . نقطهٔ O مرکز دایره محیطی مثلث ABC است که نقطه تقاطع ناصف های عمودی اضلاع مثلث ABC بدست آمده است .

$$\sin A = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{a}{2\cdot\frac{2S}{bc}}$$

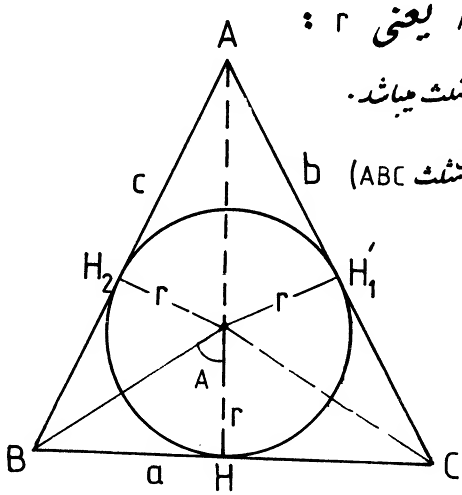
$$R = \frac{a}{\frac{4S}{bc}} = \frac{abc}{4S}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

S مساحت مثلث است .

دریافت طول شعاع دایره محاطی مثلث ABC یعنی r :

مرکز دایرهٔ محاطی مثلث نقطهٔ تقاطع سه ناصف الزاویه مثلث میباشد.



$$S_{(\text{مساحت مثلث } ABC)} = \frac{1}{2}a\cdot r + \frac{1}{2}b\cdot r + \frac{1}{2}c\cdot r$$

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c) \quad , \quad a+b+c = 2P$$

$$S = \frac{1}{2}r\cdot 2P$$

$$S = r\cdot P \quad , \quad r = \frac{S}{P}$$

$$r = \frac{\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}{P}$$

بنظر به شکل P رابطهٔ ذیل را میتوانیم بنویسیم :

اطراف معادله را به 2 تقسیم مینمائیم :

$$2BH + 2CH + 2AH_1 = 2P$$

$$BH + CH + AH_1 = P$$

$$a + AH_1 = P \quad \text{و} \quad AH_1 = P - a$$

$$BH + b = P \quad \text{و} \quad BH = P - b$$

به اساس رابطهٔ فوق دو رابطه دیگر را می نویسیم :

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{r}{P-a} \quad \text{و} \quad r = (P-a)\tan\frac{A}{2}$$

$$\tan\frac{B}{2} = \frac{r}{P-b} \quad \text{و} \quad \tan\frac{C}{2} = \frac{r}{P-c}$$

$$r = (P-a)\tan\frac{A}{2} \quad \text{و} \quad r = (P-b)\tan\frac{B}{2}$$

$$r = (P-c)\tan\frac{C}{2} .$$

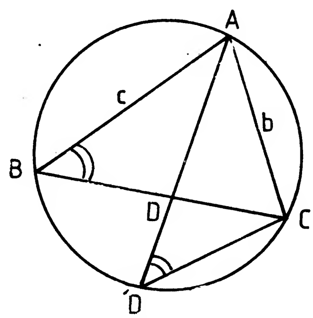
دریافت طول ناصف الزاویه داخلی مثلث ازجنس طول اضلاع آن مثلث :

قضیه :

درمثلث ABC که طول اضلاع آن a ، b ، c میباشد AD ناصف الزاویهٔ داخلی آن است

اثبات مینمائیم که :

$$AD = \frac{2}{(b+c)}\sqrt{bc \cdot P(P-a)}$$



P نصف محیط مثلث مذکور میباشد .

ثبوت : دایرهٔ محیطی مثلث ABC را ترسیم مینمائیم . امتداد ناصف الزاویه AD دایره را درنقطه D́ قطع میکند. D́ را به نقطه C وصل میکنیم ازمشابهات مثلثهای ACD و ABD میتوان نوشت :

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AD'}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AD} \cdot \overline{AD'}$$

$$AB \cdot AC = AD\,(\overline{AD} + \overline{DD'}) = \overline{AD}^2 + \overline{AD} \cdot \overline{DD'}$$

$$\overline{AD^2} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} - \overline{AD} \cdot \overline{DD'}$$

از طرف دیگر نظر به مشابهات مثلث های ABD و DD́C داریم :

$$\overline{AD} \cdot \overline{DD'} = \overline{DB} \cdot \overline{DC}$$

اکنون قیمت های $\overline{DB}$ و $\overline{DC}$ را بجای شان مینویسیم

$$\overline{AD}^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$$

اکنون قیمت DB و DC را بدست آورده بعوض شان مینویسیم :

(ناصف الزاویه ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم مینماید)

$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{DC + DB}{DB} = \frac{AC + AB}{AB}$$

$$\frac{a}{DB} = \frac{b + c}{c}$$

$$DB = \frac{ac}{b + c}$$

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{DB + DC}{DC} = \frac{AB + AC}{AC}$$

$$\frac{a}{DC} = \frac{b+c}{b} \Longrightarrow DC = \frac{ab}{b+c}$$

$$\overline{AD}^2 = bc - \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c}$$

$$\overline{AD}^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$\overline{AD}^2 = \frac{bc(b+c)^2 - a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc\{(b+c)^2 - a^2)\}}{(b+c)^2}$$

$$\overline{AD}^2 = \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)}$$

$$\overline{AD}^2 = \frac{bc(2P)2(P-a)}{(b+c)^2} = \frac{4bcP(P-a)}{(b+c)^2}$$

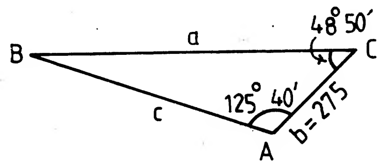
$$\overline{AD}^2 = \sqrt{\frac{4bc \cdot P(P-a)}{(b+c)^2}}$$

$$AD = \frac{2}{(b+c)}\sqrt{bc \cdot P(P-a)}$$

مثال اول : نقاط A و B بدو طرف دریا درساحل های مقابل تعین شده اند .

از نقطه A یک خط بطول $AC = 275$ ft جداشده است. زاویه $C\hat{A}B = 125° \, 40'$

و $A\hat{C}B = 48° 50'$ خوانده شده است . طول AB را دریافت نمائید .



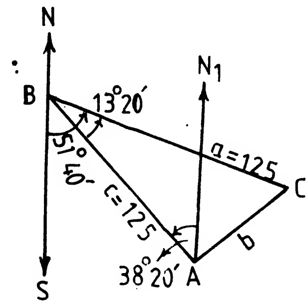
حل : درمثلث ABC ، $\hat{B} = 180° - (C + A)$

$$\hat{B} = 5° 30'$$

$$AB = C = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{275 \sin 48° 50'}{\sin 50° 30'} = \frac{275(0{,}7529)}{0{,}0958} = 2160 \text{ ft}$$

مثال دوم : از نقطهٔ A یک پیلوت 125 mi در جهت N 38° 20′W پرواز میکند وپس میگردد . بعد از آن اشتباهاً به فاصله 125 mi در جهت S 51° 40′E پرواز میکند بعد از چقدر فاصله و بکدام جهت پرواز کند تا به نقطهٔ A برسد .

حل : در مثلث ABC :



$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$= (125)^2 + (125)^2 - 2(125)(125)\cos 13°20'$$

$$= 2(125)^2(1 - 0{,}9730) = 843{,}7$$

$$b = 29{,}0$$

$$\sin A = \frac{a\sin B}{b} = \frac{125\ \sin 13°20'}{29{,}0}$$

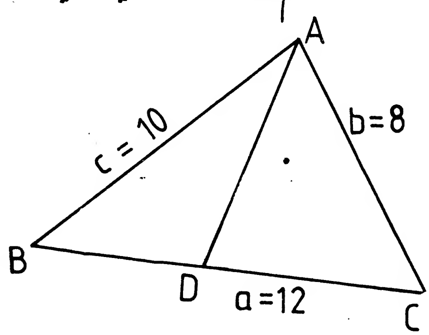
$$= \frac{125(0{,}2306)}{29{,}0} = 0{,}9940$$

$$A = 83°\,40'$$

چون $\angle CAN_1 = \hat{A} - (N_1\hat{A}B) = 45°20'$ است لهذا پیلوت مذکور بفاصلهٔ 29 میل در جهت S 45° 20′ W به رفتن از C تا A پرواز نماید .

مثال سوم : طول های سه ضلع یک مثلث بالترتیب 8 cm ، 10 cm و 12 cm اند .

اندازه قطعه خط های راکه توسط ناصف الزاویه های داخلی جدامیشود وهم طول ناصف الزاویه ها را دریافت کنید؟



$$DB = \frac{ac}{b+c}$$

$$DB = \frac{12\times 10}{10+8} = \frac{120}{18} = \frac{20}{3}$$

$$DC = \frac{ab}{b+c} = \frac{12\times 8}{10+8} = \frac{96}{18} = \frac{16}{3}$$

امتحان : $DB + DC = BC = \frac{20}{3} + \frac{16}{3} = \frac{36}{3} = 12$

طول ناصف الزاویه :

$$AD = \frac{2}{b+c}\sqrt{bc \cdot p(p-a)} \quad , \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$AD = \frac{2}{10+8}\sqrt{10 \times 8 \cdot 15\,(15-12)} \quad p = \frac{8+10+12}{2} = \frac{30}{2}$$

$$p = 15$$

$$AD = \frac{2}{18}\sqrt{10 \times 8 \cdot 15 \cdot 3} = \frac{1}{9}\sqrt{3600} = \frac{1}{\cancel{9}_{3}}\ \cancel{60}^{20}$$

$$AD = \frac{20}{3}$$

قطعات دیگر را که توسط ناصف های زوایای B و C جدا میشوند، شاگردان محاسبه نمایند.

مثال چهارم : طول اضلاع یک مثلث بالترتیب 5cm ، 7cm و 8cm است. شعاع دایره داخلی و خارجی این مثلث را دریافت کنید.

حل :

$$R = \frac{abc}{4S}$$

$$R = \frac{5 \times 7 \times 8}{4S} \qquad p = \frac{5+7+8}{2} = 10$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)} = \sqrt{10 \times 5 \times 3 \times 2}$$

$$S = 10\sqrt{3}$$

$$S = \frac{abc}{4S}$$

$$R = \frac{5 \times 7 \times 8}{4 \cdot 10\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = r$$

مثال پنجم : $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

A ، B و C زوایای داخلی یک مثلث میباشد .

حل :

$$A + B + C = \pi$$

$$A + B = \pi - C$$

$$\tan(A+B) = \tan(\pi - C)$$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = \frac{\tan \pi - \tan C}{1 - \tan \pi \cdot \tan C}$$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = \frac{-\tan C}{1}$$

$$\tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

مثال ششم : مطابقت ذیل را اثبات مینمائیم :

$$\tan\frac{\alpha}{2} \cdot \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2} \cdot \tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2} \cdot \tan\frac{\alpha}{2} = 1$$

حل : دریک مثلث رابطهٔ ذیل موجود است :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma \qquad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \tan\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \cot\frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}}{1 - \tan\frac{\alpha}{2} \tan\frac{\beta}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}=1-\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\ \tan\frac{\alpha}{2}=1$$

مثال هفتم : مطابقت ذیل را اثبات مینمائیم :

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

A ، B و C زوایای یک مثلث میباشند .

حل :

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$A+B+C=\pi\ ,\ A+B=\pi-C$$

$$\sin\frac{A+B}{2}=\sin(90^\circ-\frac{C}{2})=\cos\frac{C}{2}$$

رابطه بالا را به این شکل می نویسیم :

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\cos\frac{C}{2}[\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}]$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\cos\frac{C}{2}[\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}]$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{\frac{A-B}{2}+\frac{A+B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}{2}\right]$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=\not{2}\cos\frac{C}{2}[\not{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}]$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

همچنان از نقطهٔ R عمود $\overline{RM}$ را بالای شعهٔ $\overrightarrow{OA}$ رسم میکنیم .

اکنون قیمت $\sin(\alpha+\beta)$ عبارت است از :

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\overline{PD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{PQ}+\overline{QD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{MR}+\overline{QD}}{\overline{OD}}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\overline{MR}}{\overline{OD}} + \frac{\overline{QD}}{\overline{OD}}$$

کسر اولی را به $\frac{\overline{OR}}{\overline{OR}}$ وکسر دومی را به $\frac{\overline{DR}}{\overline{DR}}$ ضرب میکنیم .

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\overline{MR}}{\overline{OD}} \cdot \frac{\overline{OR}}{\overline{OR}} + \frac{\overline{QD}}{\overline{OD}} \cdot \frac{\overline{DR}}{\overline{DR}}$$

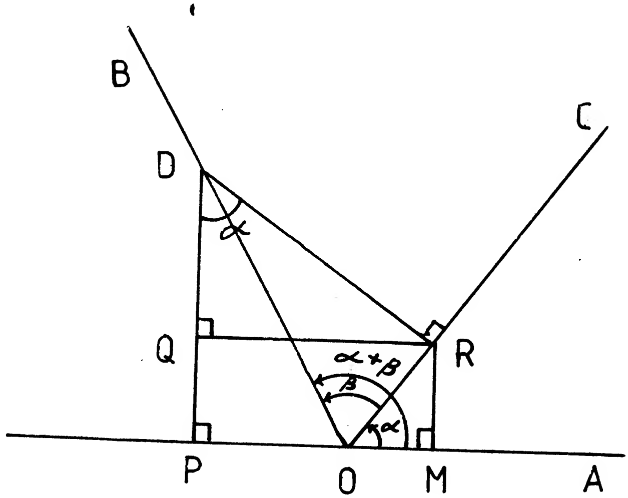
$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\overline{MR}}{\overline{OR}} \cdot \frac{\overline{OR}}{\overline{OD}} + \frac{\overline{QD}}{\overline{DR}} \cdot \frac{\overline{DR}}{\overline{OD}}$$

هرگاه رابطه فوق با شکل تطبیق شود چنین نتیجه میشود که : $\frac{\overline{MR}}{\overline{OR}} = \sin\alpha$

$\frac{\overline{OR}}{\overline{OD}} = \cos\beta$ ، $\frac{\overline{QD}}{\overline{DR}} = \cos\alpha$ ، $\frac{\overline{DR}}{\overline{OD}} = \sin\beta$ میباشند .

$$\therefore \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

شرح قضیه فوق رامیتوانیم بالای یک زاویهٔ منفرجه $A\hat{O}B$ تطبیق نمائیم شکل (2)



شکل (2)

مثال هشتم: در یک مثلث متساوی الساقین طول ساق آن $8\sqrt{5}$ سانتی متر و قاعدهٔ آن $16\,cm$ مساحت آن $128\ cm^2$ میباشد. قیمت R را دریافت نمائید.

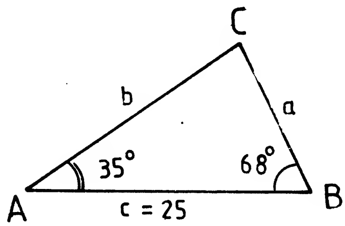
حل :

$$R = \frac{abc}{4S}$$

$$R = \frac{16\cdot 8\sqrt{5}\cdot 8\sqrt{5}}{4\cdot 128} = \frac{\overset{4}{\cancel{16}}\cdot \overset{1}{\cancel{64}}\cdot 5}{\underset{1}{\cancel{4}}\cdot \underset{2}{\cancel{128}}} = 10\ cm$$

مثال نهم: مثلث ABC را حل کنید در صورتیکه $C = 25\ cm$ و $\hat{A} = 35^\circ , \hat{B} = 68^\circ$ باشد.

حل :



دریافت زاویه C :

$$C = 180 - (A + B) = 180^\circ - 103^\circ = 77^\circ$$

دریافت طول a :

$$a = \frac{c\sin A}{\sin C}$$

$$a = \frac{25\sin 35^\circ}{\sin 77^\circ} = \frac{25(0,5736)}{0,9744} = 15$$

دریافت طول b :

$$b = \frac{C\sin B}{\sin C} = \frac{25\sin 68^\circ}{\sin 77} = \frac{25(0,9272)}{0,9744} = 24$$

امتحان سوال فوق توسط فارمول Mollweides :

$$\frac{b+a}{C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}C}$$

یا

$$(b+a)\sin\frac{1}{2}C = C\cos\frac{1}{2}(B-A)$$

یا

$$(b+a)\sin\frac{1}{2}C = 39\sin 38^\circ 30' = 39\ (0,6225) = 24,3$$

$$c\cos\frac{1}{2}(B-A) = 25\cos 16^\circ 30' = 25(0,9588) = 24,0$$

امتحان سوال فوق در فارمول ارتسام : $C = a\cos B + b\cos A$

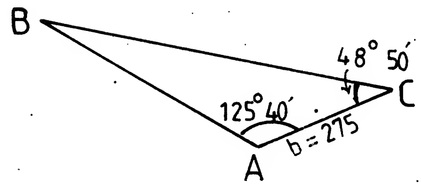
$C = 15\cos 68^\circ + 24\cos 35^\circ = 15(0,3746) + 24(0,8192) = 25,3$

اجزای باقی مانده عبارت انداز : $a = 15$ ، $b = 24$ ، $\hat{c} = 77$

تمرینات : ۱- A و B دونقطه در دوساحل مقابل یک یا یا تعین شده اند . قطعه خط $\overline{AC} = 275\ ft$ به زاویه $C\hat{A}B = 125^\circ\ 40'$ تعین شده است . هرگاه زاویه ACB

$A\hat{C}B = 48^\circ\ 50'$ محاسبه شده باشد طول AB را دریافت کنید ؟

جواب 2160 ft



۲ - اندازه های سه ضلع یک مثلث 24 cm ، 18 cm و 12 cm اند شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث را دریافت کنید ؟

۳ - شعاع دایرهٔ محیطی مثلث قایم الزاویه ای را حساب کنید که مساحت آن $84\ cm^2$ و اندازه یکی از ارتفاع آن 3,36 cm باشد .

۴ - در مثلث قایم الزاویه ایکه اندازه های دوضلع قایم آن 12 cm و 5 cm میباشند شعاع دایرهٔ محاطی مثلث مذکور را دریافت کنید ؟

۵ - طول قاعدهٔ یک مثلث متساوی الساقین $a = 8\ cm$ و شعاع دایره داخلی آن $r = 3\ cm$ میباشد . ساقها و شعاع دایره محیطی مثلث را دریافت کنید ؟

۶ - اگر اندازه های سه ضلع یک مثلث برحسب سانتی متر $a = 15$ ، $b = 25$ ، $c = 160$ باشند طول های سه ناصف الزاویه داخلی مثلث مذکور را محاسبه کنید ؟

۷ - قاعدهٔ یک مثلث متساوی الساقین 10 cm است. اندازه هریک از وساق آن 13cm است.
اندازهٔ شعاع دایره محیطی وهریک ازارتفاع های مثلث راحساب کنید .

۸ - دریک مثلث ABC رابطه ذیل را به اثبات برسانید ؟

$$4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sin A-\sin B+\sin C$$

۹ - اثبات نمائیدکه :

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

۱۰ - اثبات نمائیدکه :

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cdot\cos C$$

۱۱ - اثبات نمائیدکه :

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2+2\cos A\cos B$$

۱۲ - درمثلث قایم الزاویه ایکه طول اضلاع قایم آن b و c داده شده باشند، مساحت وطول شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث رادریافت کنید .

۱۳ - شعاع دایره محیطی مثلث قایم الزاویه ای راکه مساحت آن $84\ cm^2$ وطول یکی ازارتفاع آن 3,36 cm است ، حساب کنید ؟

فصل چهارم

لوگاریتم (Logarithm)

لوگاریتم یک مبحث بزرگ ریاضی بوده عملیه های ، ضرب تقسیم وبتوان رسیدن را چندین مرتبه کوتاه وآسان می سازد. طور مثال محاسبه $(2.34)^{25}$ یا $(19,085)^{2,135}$ بطور مستقیم مشکلات زیادی رادربردارد . اما توسط عملیه لوگاریتم به آسانی و دقیق به وقت بسیار کم حل شده میتواند .

تعریف : معادلهٔ اکسپونانسیل $a^x = N$ رادرنظر میگیریم. نظر به تعریف لوگاریتم میتوانیم بنویسیم که:
$Log_a N = x$ یعنی اگر a رابتوان x رفع کنیم (a^x) عدد N را به ما میدهد . بناءً چنین تعریف مینمائیم که لوگاریتم یک عدد بیک قاعدهٔ معین عبارت ازعددی است که اگرقاعده مذکور به توان آن مرفوع شود . عدد مذکور (N) حاصل میشود .

مثال : از معادله $3^2 = 9$ را بشکل لوگاریتم چنین مینویسیم : $Log_3 9 = 2$ درین رابطه لوگاریتمی اگرقاعده 3 رابتوان 2 رفع کنیم عدد 9 را بما میدهد .

مثال : $Log_2 8 = 3$ داده شده است . معادلهٔ اکسپونانسیل آن رامینویسیم :

حل : داریم که : $2^3 = 8$

بصورت لوگاریتمی بنویسید ؟

$10^3 = 1000$, $10^2 = 100$, $10^1 = 10$, $10^0 = 1$

حل :

$Log_{10} 1000 = 3$ $Log_{10} 100 = 2$, $Log_{10} 10$ 1 , $Log_{10} 1 = 0$

لوگاریتم اعداد بزرگتر از یک (۱) :

$$10^0 = 1 \Longrightarrow \text{Log}_{10} = 0$$

$$10^1 = 10 \Longrightarrow \text{Log}_{10} 10 = 1$$

$$10^2 = 100 \Longrightarrow \text{Log}_{10} 100 = 2$$

$$10^3 = 1000 \Longrightarrow \text{Log}_{10} 1000 = 3$$

نتیجه :

۱ - لوگاریتم اعداد بزرگتر از یک مثبت است .

۲ - لوگاریتم یک به هر قاعده صفر است .

۳ - لوگاریتم هر عدد بقاعده خودش مساوی به یک است .

لوگاریتم اعداد کوچکتر از یک (۱) :

$$10^0 = 1 \Longrightarrow \text{Log}_{10} 1 = 0$$

$$10^{-1} = 0,1 \Longrightarrow \text{Log}_{10} 0,1 = -1$$

$$10^{-2} = 0,01 \Longrightarrow \text{Log}_{10} 0,01 = -2$$

$$10^{-3} = 0,001 \Longrightarrow \text{Log}_{10} 0,001 = -3$$

نتیجه : لوگاریتم اعداد کوچکتر از یک الی صفر منفی است . اعداد کوچکتر از صفر یعنی اعداد منفی لوگاریتم ندارند .

تبصره : هرگاه $\text{Log}_b N = x$ باشد پس $b^x = N$ میشود .

این دو معادلات فوق یکی لوگاریتمی و دیگری اکسپوتانسیل میباشد که بدو شکل مختلف ارایه شده اما عین افاده را محتوی میباشد . در رابطهٔ فوق N یک عدد مثبت انتخاب شده است که خلاف یک (۱) میباشد . اما x یک عدد حقیقی است که مثبت ، منفی یا صفر شده میتواند . توان b

درلوگاریتم میتوانند نسبتی یا غیرنسبتی باشند مثلاً در روابط $\text{Log}_{10}2 \simeq 30103$ یا

$10^{30103} = 2$ که توان عبارت 30103 میباشد یک عدد غیرنسبتی است .

نظر به تعریف لوگاریتم $\text{Log}_b N$ یک اکسپوننت است . بناءً اگر بعوض اکسپوننت نوشته شود باید عدد

N بدست آید یعنی :

$$b^{\text{Log}_b N} = N$$

مثال :

$$10^{\text{Log}_{10}100} = 100$$

$$\text{Log}_{10}100 = 2 \quad \therefore 10^2 = 100$$

قوانین اساسی لوگاریتم :

قضیه : لوگاریتم حاصل ضرب چند عدد مساوی به مجموع لوگاریتم های آن است یعنی :

A ، B و C اعداد مثبت خلاف صفراند .

$$\text{Log}_a A\cdot B\cdot C = \text{Log}_a A + \text{Log}_a B + \text{Log}_a C$$

ثبوت :

$\text{Log}_a A = x \quad , \quad \text{Log}_a B = y \quad , \quad \text{Log}_a C = z$ وضع میکنیم .

نظر به تعریف لوگاریتم رابطه های فوق را میتوانیم بشکل رابطه های طاقت دار بنویسیم :

$$A = a^x \quad , \quad B = a^y \quad , \quad C = a^z$$

روابط فوق را طرف به طرف ضرب میکنیم :

$$A\cdot B\cdot C = a^x\cdot a^y\cdot a^z$$

$$A\cdot B\cdot C = a^{x+y+z}$$

رابطهٔ اخیر را بشکل لوگاریتم مینویسیم :

$$\log_a A\cdot B\cdot C = x+y+z$$

$$\log_a A\cdot B\cdot C = \log_a A + \log_a B + \log_a C$$

قضیه : لوگاریتم یک کسر (حاصل تقسیم) مثبت مساوی به لوگاریتم صورت منفی لوگاریتم مخرج میباشد یعنی :

$$\log \frac{A}{B} = \log_a A - \log_{10} B$$

ثبوت : فرض میکنیم : ...... $\log_a A = x$ ، $\log_a B = y$

در این صورت :

$$a^x = A \quad , \quad a^y = B$$

رابطهٔ فوق را طرف بطرف تقسیم مینمائیم :

$$\frac{A}{B} = \frac{a^x}{a^y}$$

یا $\frac{A}{B} = a^{x-y}$

بشکل لوگاریتم رابطه مقابل را می نویسیم :

$$\log_a \frac{A}{B} = x-y \quad \text{یا} \quad \log \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

مثال ۱ : $\log_a 35 = \log_a 5\cdot 7 = \log_a 5 + \log_a 7$

مثال ۲ : $\log 30 = 2\cdot 3\cdot 5 = \log_a 2 + \log_a 3 + \log_a 5$

نوت : لوگاریتم یک عدد بیک قاعدهٔ معین مساوی به مجموع لوگاریتم اجزای این عدد به عین قاعده این لوگاریتم میباشد .

مثال ۳ : $\log_a \frac{2}{3} = \log_a 2 - \log_a 3$

مثال ۴ $\log_a \frac{6}{35} = \log \frac{2\cdot 3}{5\cdot 7} = \log_a 2 + \log_a 3 - \log_a 5 - \log_a 7$

مثال: لوگاریتم 8 بقاعده 2 و 25 بقاعدهٔ 10 را دریافت مینمائیم:

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3$$

$$\log_{10} 25 = \log_{10} 5^2 = 2\log_{10} 5$$

قضیه: لوگاریتم یک عدد توان دار مساویست به حاصل ضرب توان ولوگاریتم آن عدد یعنی:

$$\log_a A^p = p\log_a A$$

ثبوت: $\log_a A = x$ وضع میکنیم ازاین رابطه چنین نتیجه بدست میآید که: $a^x = A$

اطراف رابطهٔ فوق را به توان p رفع مینمائیم:

$$(a^x)^p = A^p$$

$$a^{px} = A^p$$

بشکل لوگاریتم مینویسیم: $\log_a A^p = px$

یا $\log_a A^p = p\log_x A$

مثال: $\log_3 \sqrt[3]{7} = \log_3 7^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log 7$

مثال: $\log_{10}\frac{125}{49} = \log_{10}\frac{5^3}{7^2} = \log_{10}5^3 - \log_{10}7^2$

$$= 3\log_{10}5 - 2\log_{10}7$$

تمرینات: هرگاه $\log_{10}2 = 0{,}30$ ، $\log_{10}3 = 0{,}48$ و $\log_{10}7 = 0{,}85$ داده شده باشد لوگاریتم اعداد ذیل را دریافت نمائید.

1- $\log_{10} 21$ ، 2- $\log_{10}\frac{3}{7}$ ، 3- $\log\frac{7}{3}$ ، 4- $\log_{10} 14$

5- $\log_{10}\frac{\sqrt[3]{7}}{3}$ ، 6- $\log_{10} 7$ ، 7- $\log_{10} 128$

8_ $\log_{10}\sqrt[4]{3}$ ، 9_ $\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)^{11}$ ، 10_ $\log_{10}\sqrt[5]{6}$

11_ $\log_{10} 7\sqrt[6]{2}$ ، 12_ $\log_{10}\frac{32}{7}$ ، 13_ $\log_{10}\sqrt[7]{5}$

14_ $\log_{10} 50$ ، 15_ $\log_{10}(145)^5$ ، 16_ $\log_{10}\frac{6}{49}$

حل نمائید ؟

1_ $\log_2 8 =$ ..... ، 2_ $\log_2 4 =$ .... ، 3_ $\log_5 25 =$ .... ، 4_ $\log_6 36 =$ ....

5_ $\log_{10}\sqrt{2} =$ ... ، 6_ $\log_{10}$ .... $= 2$ ، 7_ $\log_{10} 0{,}1 =$ ... ، 8_ $\log_{10} 0{,}001 =$ ...

تبدیل لوگاریتم یک عدد از یک قاعده به قاعدهٔ دیگر :

دو سیستم لوگاریتم یکی سیستم Briggs که قاعدهٔ این لوگاریتم 10 بوده و Common لوگاریتم نیز یاد می شود. لوگاریتم یک عدد به قاعده 10 به این شکل میباشد:

$$\log_{10} 10 = 1 \quad , \quad \log_{10} 100 = 2$$

سیستم دیگر لوگاریتم Napierian است که لوگاریتم طبیعی نیز یاد می شود. قاعده این لوگاریتم $e = 2.71828$ میباشد و به سمبول $\ln x$ ، $\mathrm{Ln}x$ یا $\log_e x$ نشان داده شده است. این سیستم لوگاریتم در ریاضیات عالی و فزیک اهمیت زیادی دارد.

بعضی اوقات در محاسبات لوگاریتمی و حل سوالات چنین ایجاب مینماید که لوگاریتم از یک قاعده به قاعده های دیگری تبدیل شود. بدین لحاظ تبدیل قاعدهٔ لوگاریتم را درین قسمت تشریح مینمائیم:

قضیه : اثبات مینمائیم که :

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

$$\log_b N \cdot \log_a b = \log_a N$$

ثبوت : $Log_b N = y$ فرض میکنیم ازاینجا $b^y = N$ بدست میآید. هردوطرف معادله اکسپوناسیل رانظر به قاعده a لوگاریتم میگیریم :

$$Log_a b^y = Log_a N$$ یا $$y \cdot Log_a b = Log_a N$$

یا $$Log_b N \cdot Log_a b = Log_a N$$

یا $$Log_b N = \frac{Log_a N}{Log_a b}$$

دررابطه فوق هرگاه N قیمت a رابگیرد :

$$Log_b a = \frac{1}{Log_a b}$$

یا $$Log_b a \cdot Log_a b = 1$$

با استفاده ازرابطه فوق میتوانیم بنویسیم :

$$Log_c a \cdot Log_b c \cdot Log_a b = 1$$

دررابطه $Log_b N = \frac{Log_a N}{Log_a b}$ هرگاه $a = 10$ و $b = e$ تعویض شودچنین رابطه ، بدست میآید :

$$Log_e N = \frac{Log_{10} N}{Log_{10} e}$$

$$Log_e N = \frac{Log_{10} N}{0,43429} = 2{\cdot}3026\ Log_{10} N$$

$$\ln N = 2,3026\ Log_{10} N$$

بناءً لوگاریتم طبیعی یک عدد ($\ln$) ازحاصل ضرب لوگاریتم آن عدد به قاعدهٔ 10 درعدد 2,3026 بدست میآید. یا بعبارهٔ دیگر $\ln N = M\ Log_{10} N$ و $M = 2,3026$ میباشد

قضیه : کوساین مجموعه دوزاویه معلومه α و β (شکل ۲) عبارت است از :

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

ثبوت : در شکل ۱ قیمت $\cos(\alpha+\beta)$ را دریافت مینمائیم :

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OM} - \overline{PM}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OM} - \overline{QR}}{\overline{OD}}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{OM}}{\overline{OD}} - \frac{\overline{QR}}{\overline{OD}}$$

اکنون کسر اولی را به $\frac{OR}{OR}$ وکسر دومی را به $\frac{DR}{DR}$ ضرب میکنیم :

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{OM}}{\overline{OD}}\cdot\frac{\overline{OR}}{\overline{OR}} - \frac{\overline{QR}}{\overline{OD}}\cdot\frac{\overline{DR}}{\overline{DR}}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{OM}}{\overline{OR}}\cdot\frac{\overline{OR}}{\overline{OD}} - \frac{\overline{QR}}{\overline{DR}}\cdot\frac{\overline{DR}}{\overline{OD}}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

قضیه : تانجانت مجموعه دو زاویه معلومه α و β عبارت است از :

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

ثبوت :

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

صورت و مخرج کسر فوق را به $\cos\alpha\cos\beta$ تقسیم مینمائیم

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}} + \dfrac{\cancel{\cos\alpha}\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\cancel{\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha}\cancel{\cos\beta}} - \dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

مثال :

۱ - $Log_2 11$ را به لوگاریتم عددیکه قاعدهٔ آن 10 باشد تبدیل نمائید؟

۲ - $Log_5 0,417$ را به لوگاریتم قاعدهٔ e تبدیل نمائید؟

حل :

$$Log_b N = \frac{Log_a N}{Log_a b}$$

$$Log_2 11 = \frac{Log_{10} 11}{Log_{10} 2} = \frac{1,0414}{0,30103} = 3,4594316$$

$$Log_2 11 = 3,46$$

مثال : $Log_5 0,417$ را به لوگاریتم قاعدهٔ e تبدیل مینمائیم :

ازین فارمول استفاده مینمائیم :

$$Log_b N = \frac{Log_a N}{Log_a b}$$

$$Log_5 0,417 = \frac{\ln 0,417}{\ln 5} = \frac{-0,875}{1,609} = -0,544$$

کرکترستیک و مانتیس : Characterstic and mantissa

مثال های ذیل را درنظر گیرید :

$Log_{10} 1 = 0$, $Log_{10} 10 = 1$, $Log_{10} 100$ 2 , $Log_{10} 1000 = 3$

$Log\ 10000 = 4$, ...

قراریکه مشاهده مینمائیم . هرگاه عدد بزرگ شده برود . لوگاریتم آن نیز بزرگ شده میرود . طور مثال عدد از 1 تا 10000 تزاید داده شده است متناسب بآن لوگاریتم آن از 1 تا 4 تزاید نموده است . عدد صفر را کرکترستیک لوگاریتم 1 عدد 1 را کرکترستیک

لوگاریتم 10 ، عدد 2 راکرکتر ستیک لوگاریتم 100 ، عدد 3 راکرکتر ستیک لوگاریتم 1000 و عدد 4 راکرکتر ستیک لوگاریتم 10000 می نامند . چنین نتیجه بدست میآید که کرکتر ستیک لوگاریتم یک عدد ، یک عدد صحیح است . و هم چنین نتیجه بدست میآید که کرکتر ستیک اعداد یک رقمی صفر کرکتر ستیک اعداد دو رقمی 1 ، کرکتر ستیک اعداد سه رقمی 2 ، کرکتر ستیک اعداد چهار رقمی 3 = 1 - 4 و بالآخره کرکتر ستیک اعداد n رقمی مساوی به n - 1 میباشد

مثال اول : کرکتر ستیک لوگاریتمی عدد دو رقمی 20 را دریافت مینمائیم :

حل :

$$\mathrm{Log}_{10} 20 = \mathrm{Log}\,(10 \cdot 2) = \mathrm{Log}_{10} 10 + \mathrm{Log}_{10} 2$$

$$\mathrm{Log}_{10} 20 = 1 + 0,30103 \qquad (\mathrm{Log}_{10} 2 = 0,30103)$$

کرکتر ستیک عدد دو رقمی یک (1) میباشد .

مثال دوم : کرکتر ستیک عدد سه رقمی 300 را دریافت مینمائیم :

$$\mathrm{Log}_{10} 300 = \mathrm{Log}_{10}(100 \,,\, 3) = \mathrm{Log}_{10} 100 + \mathrm{Log}_{10} 3$$

$$= 2 + 0,4771 \qquad (\mathrm{Log}_{10} 3 = 0,4771)$$

کرکتر ستیک اعداد سه رقمی 2 میباشد .

به همین ترتیب کرکتر ستیک لوگاریتم عدد چهار رقمی 5000 را 3 دریافت مینمائیم :

$$\mathrm{Log}_{10} 5000 = \mathrm{Log}_{10}(1000 \,, 5) = \mathrm{Log}_{10} 1000 + \mathrm{Log}\, 5$$

$$= 3 + 0,69897$$

از تطبیقات فوق چنین نتیجه گیری مینمائیم که کرکتر ستیک لوگاریتم اعداد بزرگتر از یک مثبت و مساوی به

تعداد ارقام آن منفی یک میباشد. یعنی اگر تعداد ارقام یک عدد بزرگتر از یک n باشد کرکترستیک لوگاریتم آن (n-1) و مثبت میباشد.

مثال سوم: کرکترستیک لوگاریتم عدد سه رقمی 5954 ، 3 است. (4 - 1 = 3)

کرکترستیک لوگاریتم عدد سه رقمی 897 . 2 (3 - 1 = 2)

کرکترستیک لوگاریتم عدد دو رقمی 98 1 (2 - 1 = 1)

اکنون کرکترستیک اعداد کوچکتر از یک را مطالعه مینمائیم و برای این منظور اعداد ذیل را در نظر میگیریم:

$$0{,}1 = 10^{-1} \Longrightarrow \text{Log}_{10} 0{,}1 = -1$$

$$0{,}01 = 10^{-2} \Longrightarrow \text{Log}\ 0{,}01 = -2$$

$$0{,}001 = 10^{-3} \Longrightarrow \text{Log}_{10} 0{,}001 = -3$$

$$0{,}0001 = 10^{-4} \Longrightarrow \text{Log}\ 0{,}0001 = -4$$

از مثال های فوق چنین نتیجه بدست میآید:

کرکترستیک اعداد کوچکتر از یک مساوی به تعداد صفرهای بعد از علامه اعشاری (در صورتیکه طرف راست صفرها یک عدد موجود باشد) جمع (1) و علامه آن منفی میباشد.

یعنی اگر تعداد صفرهای طرف راست علامه اعشاری و طرف چپ عدد کسری که توسط علامه اعشاری و عدد کسری محصور شده اند n باشد کرکترستیک این عدد کسری کوچکتر از یک (n + 1)- میباشد.

مثال چهارم: لوگاریتم عدد 0,572 دارای کرکترستیک (1-) میباشد.

لوگاریتم عدد 0,057 دارای کرکترستیک (2-) میباشد.

لوگاریتم 0,00235 دارای کرکترستیک (3-) میباشد.

اعدادیکه از یک عدد صحیح و یک کسر اعشاری تشکیل شده باشد (45,7) کرکترستیک

لوگاریتم این قسم اعداد با درنظرداشت قسمت عددصحیح (45) این عدد تعین میشود مثلاً :

$$\text{Log } 45{,}7 = 1{,}65992$$

چون این عدد بزرگتراز 1 و عددصحیح آن 45 عدد دورقمی میباشد. بناءً کرکترستیک آن 1+ می باشد بعضی اوقات برای اینکه قسمت کسراعشاری لوگاریتم یک عدد رامثبت حفظ وترتیب نمایند کرکترستیک را باین شکل می نویسند :

$$\text{Log } 0{,}006 = -3 + 0{,}77815 = 7{,}77815 - 10 \quad (-3 = 7 - 10)$$

خلاصه : کرکترستیک لوگاریتم بزرگتر از یک مساوی به تعداد اعدادارقام آن عددمنفی 1 میباشد. کرکترستیک اعدادکوچکتراز یک مساوی به مجموع تعدادصفرهای طرف راست علامه اعشاری وطرف چپ عددکسری (صفرهائیکه بین علامه اعشاری وعددکسری قیدشده اند) جمع (1) و دارای علامه منفی می باشد - یعنی اگرتعدادصفرهای یک کسراعشاری کوچکتر از یک n باشد ، کرکترستیک این کسراعشاری $-(n+1)$ میباشد.

مانتیس وتعین مانتیس لوگاریتم یک عدد :

قراریکه مشاهده نمودیم اعدادیکه دربین صفرو 1 وبین 1 و 10 وبین 10 و 100 وبین 100 و 1000 . . . . وغیره قراردارند لوگاریتم آنها ازیک عددصحیح (تام) ، جمع یک کسراعشاری تشکیل شده است که عددصحیح (تام) راکرکترستیک لوگاریتم وکسراعشاری آن رامانتیس (Mantissa) لوگاریتم مذکورمی نامند.

مثلاً لوگاریتم 20 عبارت است از :

$$\text{Log}_{10} 20 = \text{Log}_{10} 2 \cdot 10 = \text{Log}_{10} 10 + \text{Log}_{10} 2$$

$$\text{Log } 20 = 1 + 0{,}30103 = 1{,}30103 \quad (2 \approx 10^{0{,}30103} \text{ یا } \text{Log}_{10} 2 = 0{,}30103)$$

عدد تام 1 را بنام کرکترستیک وکسر اعشاری 0,30103 را بنام مانتیس لوگاریتم عدد 20 یاد میکنند. همچنان مانتیس لوگاریتم اعداد 300 و 5000 را دریافت مینمائیم:

$$\log_{10} 300 = \log (100 \cdot 3) = \log_{10} 100 + \log_{10} 3$$

$$\log_{10} 300 = 2 + 0.4771 = 2.4771$$

0,4771 . مانتیس لوگاریتم عدد 300 میباشد.

$$\log 5000 = \log(5 \cdot 1000) = \log 5 + \log 1000 = 3 + \log 5 = 3 + 0,69897$$
$$= 3,69897$$

مثال: لوگاریتم عدد 0,002 را دریافت مینمائیم:

$$\log 0,002 = \log_{10}(10^{-3} \cdot 2) = \log_{10} 10^{-3} + \log_{10} 2 = -3 + 0,30103$$
$$= \bar{3},30103$$

مانتیس مثبت وکرکترستیک منفی میباشد. همچنان باین شکل نشان داده می شود:

$$\log_{10} 0,002 = 7,30103 - 10 \cdots \quad (-3 = 7 - 10)$$

در تمام جدول های لوگاریتم مانتیس مثبت حفظ وترتیب شده است. بناءً اگر کدام مانتیس منفی ازحل کدام سوال بدست آن را بقسم ذیل مثبت می سازیم:

$$\log_{10} \frac{1}{2} = \log_{10} 1 - \log_{10} 2 = 0 - 0,30103$$

برای اینکه مانتیس مثبت بدست آید باآن عدد 1 راجمع وهم تفریق مینمائیم:

$$= 1 - 1 - 0,30103 = \bar{1},69897$$

کرکترستیک $\bar{1}$ منفی و مانتیس 0,69897 مثبت میباشد.

هرگاه کرکترستیک و مانتیس هردو علامه منفی داشته باشند بازهم 0 = 1 - 1 را باآن علاوه و مانتیس را مثبت می سازیم: مثلاً اگر $\log N = -3 - 0,23403$ باشد چنین عمل مینمائیم:

$$\log_{10} N = -3 + 0,23403 + 1 - 1 = -4 + 0,76597$$
$$= \bar{4},76597$$

در اینجا کرکترستیک منفی و مانتیس مثبت میباشد .

قضیه : مانتیس لوگاریتم یک عدد تنها وتنها به ارقام آن عدد منحصر بوده هرگاه عدد مذکور را ده و یا ده ها مرتبه بزرگ و یاکوچک سازیم در مانتیس لوگاریتم عدد مذکور کدام فرق و یا تغیری بمیان نیامده عین مانتیس را حفظ می نماید .

اثبات مینمائیم که مانتیس لوگاریتم اعداد 58300 ، 583 ، 0,00583 و 0,0000583 باهم مساویت وعین مانتیس را دارند و تابع صفرهای طرف راست وچپ 583 نمیباشند .

ثبوت : لوگاریتم 583 دربین لوگاریتم های اعداد 100 و 1000 میباشد :

$$\log_{10} 583 = 2,76567$$

$$\log_{10} 58300 = \log_{10}(583 \cdot 100) = \log_{10} 583 + \log_{10} 100$$

$$\log_{10} 58300 = 2,76567 + 2 = 4,76567$$

$$\log 0,00583 = \log_{10}(583 \cdot 10^{-5}) = \log_{10} 583 + \log_{10} 10^{-5}$$

$$2,76567 + (-5) = \bar{3},\ 76567$$

$$\log 0,0000583 = \log_{10}(583 \cdot 10^{-7}) = \log_{10} 583 + \log_{10} 10^{-7}$$

$$= 2,76567 + (-7)$$

$$\log 0,0000583 = \bar{5},\ 76567$$

بوضاحت معلوم شدکه عدد داده شده 583 باوجودیکه ده و یا ده ها مرتبه بزرگ وکوچک شده است بازهم عین مانتیس را حفظ نموده است تنها فرق که بمیان آمده است درکرکترستیک میباشد نه در مانتیس آن عدد . ومانتیس یک عدد از تعداد صفرها و یا حرکت علامه اعشاری درآن عدد مستقل است .

مثال اول : اعداد 0,585 ، 58,5 ، 5,85 ، 5850 ، 58500

0,00585 ، تماماً دارای مانتیس 0,76716 میباشند زیرا تماماً دارای عین ارقام 585 اند .

طریق استفاده از جدول لوگاریتم قاعده 10 :

طوری مثال میخواهیم لوگاریتم 413 را در جدول چهار رقمی دریافت نمائیم :

حل : کرکترستیک عدد سه رقمی 413 عبارت از 2 است . زیرا از تعداد ارقام آن که 3 است یک را منفی میکنیم در نتیجه 2 = 1 - 3 بدست میآید . مانتیس لوگاریتم این عدد را سطر در شماره 41 افقی و به ستون عمودی در شماره 3 می بینیم تقاطع سطر و ستون کسر اعشاری 0,6160 یعنی مانتیس مطلوب را میدهد .

$$\log_{10} 413 = 2,6160$$

کرکترستیک ← → مانتیس

مثال اول : لوگاریتم عدد 0,0452 را دریافت مینمائیم

$$\log 0,0452 = ?$$

حل : لوگاریتم عدد مذکور دارای کرکترستیک $-2 = -(1+1)$ میباشد . زیرا بعد از علامه اعشاری طرف راست یک صفر قرار دارد بعوض آن 1- و با 1- جمع میشود در نتیجه کرکترستیک 2- بدست میآید . برای دریافت مانتیس 452 عدد 45 را در سطر افقی در شماره 2 ستون عمودی جدول لوگاریتم می بینیم . تقاطع سطر و ستون کسر اعشاری 0,6551 عبارت از مانتیس عدد مذکور میباشد :

$$\log_{10} 0,0452 = \bar{2},6551$$

یا

$$\log_{10} 0,0452 = 8,6551 - 10$$

مثال دوم : مانتیس لوگاریتم اعداد 0,585 ، 585 ، 58,5 ، را از جدول لوگاریتم پنج رقمی دریافت نمائید .

حل : در جدول پنج رقمی مانتیس لوگاریتم 585 را درسطر شماره 585 درستون صفر می‌بینیم کسر اعشاری 0,76716 که مانتیس اعداد فوق میباشد بدست میآید .

برای محاسبات دقیق ازجدول پنج رقمی استفاده مینمایند درین جدول پنج رقم اعشاری مانتیس را محاسبه و درجدول ها ترتیب نموده اند که درموقع ضرورت ازآن استفاده میشود .

مثال سوم : لوگاریتم عدد 7545 رادریافت نمائید ؟

حل : چون عدد فوق چهار رقمی است کرکتریستیک لوگاریتم آن 3 است . برای دریافت مانتیس آن سطر 754 رادرستون 5 می‌بینیم . ازتقاطع سطروستون کسراعشاری 0,87766 راکه مانتیس عددفوق میباشد بدست میآوریم .

$$\text{Log}\,7545 = 3,87766$$

مثال : میخواهیم مانتیس عدد 8543 راازجدول لوگاریتم پنج رقمی دریافت نمائیم چنین عمل مینمائیم :

حل : مانتیس 854 رادرستون 3 میخوانیم .کسراعشاری 0,93161 رابدست میآوریم.

مثال : Log 0,008543 رادریافت مینمائیم .

حل :

$$\text{Log}\,0,008543 = \bar{3},93161 = 7,93161 - 10$$

انترپولیشن Interpolation

قراریکه مشاهده شد مانتیس لوگاریتم اعداد چهار رقمی را ازجدول چهار رقمی وهمچنان مانتیس پنج رقمی را ازجدول مانتیس لوگاریتم پنج رقمی بدست آوردیم امابعضی اوقات با اعدادی برمیخوریم که اینگونه اعداددرجدول وجودداردکه ازآن استفاده میغنائیم زیراجدول لوگاریتم باهروسعتی که داشته باشد بازهم جوابگوی تمام اعدادشده نمیتواند بناءً برای دریافت مانتیس اینگونه اعداد ازمقایسه دوعددخیلی نزدیک به این عدد (یکی کوچکتر ودیگری بزرگتر) بکمک یک عملیه تناسب بدست میاوریم که این عملیه راکه عبارت ازیک محاسبه وسنجش دقیق میباشد انترپولیشن می نامند.

مثال اول - لوگاریتم 24357 را بدست میاوریم : کرکتریستیک این عددپنج رقمی 4 است مانتیس این عدد درجدول لوگاریتم وجودندارد امامانتیس دو عدد 24360 و 24350 که خیلی نزدیک باین عدد است درجدول وجود دارد که ازآن استفاده میغائیم ازمقایسه مانتیس دوعدد فوق بکمک عملیه تناسب مانتیس 24357 را بدست میاوریم :

مانتیس 24357 بین مانتیس 24350 و 24360 واقع شده است .

مانتیس لوگاریتم 24350 = 38650 .

مانتیس لوگاریتم 24360 = 38668 .

مانتیس لوگاریتم 24357 = ?

فرق عددسومی واولی = 7

فرق مانتیس دومی واولی = 0,00018

فرق عددی دومی واولی = 10

فرق عدد	فرق مانتیس
10	0,00018
7	x

$$x = \frac{7 \times 0,00018}{10}$$

$$x = 0,7 \times 0,00018$$

$$x = 0,000126$$

$$x = 0,00013$$

مانتیس لوگاریتم $24357 = \cdot 38650$

$$\begin{array}{r} \cdot 38650 \\ + \cdot 00013 \\ \hline \cdot 38663 \end{array}$$

$$\text{Log } 24357 = 4 \cdot 38663$$

قسمت اخیر مثال فوق راچنین خلاصه مینمائیم :

درجدول های کوچک که بطرف راست صفحه جدول لوگاریتم ثبت شده ازآنجمله درجدول محاسبه ، 18، سطر 7 رامی بینیم عدد 12،6 رامیدهد که 13 گرفته می شود 13 را با رقم های اخیر طرف راست مانتیس کوچک جمع میکنیم :

$$\text{Log } 24357 = \left\{ \begin{array}{r} 4,38650 \\ 13 \\ \hline 4,38663 \end{array} \right.$$

مثال دوم : لوگاریتم 0,17083 را دریافت کنید ؟

حل : کرکترستیک لوگاریتم عدد فوق 1- میباشد .

مانتیس لوگاریتم $17080 = \cdot 23249$

فرق عددی = 3 و فرق جدولی مساوی 25 است .

25 فرق جدولی دوستون ایکه فرق نسبتی شان 10 است میباشد . $\therefore \frac{3}{10}(25) = 7,5$

عدد 7 را باآخرین رقم مانتیس ·23249 جمع میکنیم :

$$\begin{array}{r} \cdot 23249 \\ + \quad 7 \\ \hline \cdot 23256 \end{array}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

قضیه: ساین تفاضل دوزاویه α و β عبارت است از:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

ثبوت: فارمول $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ را بالای دوزاویه α و $(-\beta)$، تطبیق مینمائیم:

$$\sin\{\alpha+(-\beta)\} = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)$$

$$\cos(-\beta) = \cos\beta$$

$$\sin(-\beta) = -\sin\beta$$

پس: $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

قضیه: کوساین تفاضل دوزاویه α و β عبارت است از:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

ثبوت: به اساس قضیه گذشته ما داریم:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

این فارمول را بالای دوزاویه α و $(-\beta)$، تطبیق مینمائیم:

$$\cos\{\alpha+(-\beta)\} = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta) - \sin\alpha\cdot\sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha(-\sin\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

قضیه: تانجانت تفاضل دوزاویه α و β عبارت است از:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\therefore \text{Log } 0{,}17083 = \bar{1}{,}\ 23256$$

یا $\text{Log } 0{,}17083 = 9{,}\ 23256 - 10$

مثال سوم : Log 745327 را دریافت مینمائیم :

حل : کرکرستیک عدد صحیح شش رقمی فوق عبارت از 5 است . برای دریافت مانتیس آن عدد را بشکل 7453,27 فرض مینمائیم (زیرا هر دو عدد عین مانتیس را دارند) مانتیس دو عدد 7454 و 7353 را از جدول لوگاریتم دریافت نموده مقایسه می نمائیم :

$$\begin{array}{cc} 7454 & 0{,}87239 \\ 7453 & 0{,}87233 \\ \hline 1 & 0{,}00006 \end{array}$$

فرق مانتیس برای 1 = 0,0000162

فرق برای 0,27 عبارت است از :

$$0{,}27 \times 0{,}\ 00006 = 0{,}0000162$$

کسر فوق را با مانتیس 7453 جمع میکنیم :

$$\begin{array}{r} 0{,}87233 \\ +\ 0{,}0000162 \\ \hline 0{,}8723462 \end{array}$$

$$\therefore \text{Log } 745327 = 5{,}8723462$$

مثال چهارم : Log 87, 528 را دریافت نمائید :

حل :

عدد صحیح آن دو رقمی است بناءً کرکتریستیک آن 1 است .

برای دریافت مانتیس آن ، مانتیس دو عدد بسیار نزدیک به 8752, 8 که بعوض عدد فوق فرض شده است درنظر میگیریم آن دو عدد عبارت انداز 8752 و 8753

یعنی 8753 > 8752,8 > 8752 مانتیس های دو عدد فرض شده عبارت است از :

مانتیس لوگاریتم 8753 = 94216·

مانتیس لوگاریتم 8752 = 94211·

فرق برای 1 = 0,00005

چون فرق جدول برای 1 معلوم شد میتوانیم فرق 0, 8 را دریافت مینمائیم :

فرق برای 0, 8 عبارت است از :

$$0,8 \times 0,00005$$

$$= 0,00004$$

این فرق حاصله را با مانتیس عدد کوچکتر از عدد مطلوب جمع میکنیم .

مانتیس لوگاریتم عدد 8752 =

$$\begin{array}{r} .94211 \\ .00004 \\ \hline .94215 \end{array}$$

مانتیس لوگاریتم عدد 8752,8 عبارت از 94215· میباشد بناءً میتوانیم بنویسیم :

$$\text{Log } 87,528 = 1,94215$$

اگر بخواهیم مثال فوق را بطور خلاصه حل کنیم : فرق مانتیس برای 1 = 5 (رقم اخیر مانتیس) است .

فرق برای 0,8 عبارت است از :

$$0,8 \times 5 = 4,0$$

اکنون عدد 4 را که درحقیقت رقم اخیر کسر اعشار است با رقم اخیر مانتیس جمع 0,94211 جمع میکنیم.

$$\begin{array}{r} .94211 \\ 4 \\ \hline .94215 \end{array}$$

عدد کسر اعشاری 4 را از جدول های کوچک (Proportional Part) در جدول 5 از شماره 8 بدست آورده میتوانیم .

معرفی جدول : Proportional :

جدول های کوچک است که طرف راست صفحه جدول لوگاریتم ترتیب شده است . درین جدول ستون طرف چپ آن 1 ، 2 ، 3 ..... 9 اعداد صحیح و ستون طرف راست آن مانتیس های اعداد به تناسب $\frac{1}{10}$ نوشته شده است . مثلاً اگر لوگاریتم 472,85 را با استفاده ازین جدول لوگاریتم بدست آریم چنین عمل مینمائیم :

	9
1	0,9
2	1,8
3	2,7
4	3,6
5	4,5
6	5,4
7	6,3
8	7,2
9	8,1

حل : کرکترستیک این عدد 2 بوده برای دریافت مانتیس آن چنین عمل می نمائیم :

فرض میکنیم که عدد مذکور 4728,5 باشد

مانتیس عدد 4728 = 0,67468

مانتیس 4729 = 0,67477

فرق عدد 1 فرق مانتیس 0,00009

درین صفحه در جدول کوچک در ستون 9 بمقابل فرق عددی 5 که از عدد 4728,5 بدست میآید مانتیس 4,5 نوشته شده است .

هرگاه مانتیس 4,5 را با ارقام اخیر کسر اعشاری مانتیس عدد کوچک 4728 جمع کنیم مانتیس عدد مطلوبه بدست میآید :

$$
\begin{array}{r}
.67468 \\
+\ 4,5 \\
\hline
.674725
\end{array}
$$

$$\text{Log}_{10} 472,85 = 2,674725$$

انتی لوگاریتم Antilogarithm :

هرگاه لوگاریتم یک عدد معلوم باشد . عدد مذکور را انتی لوگاریتم این عدد می نامند .

مثلاً لوگاریتم عدد 20 را چنین می یابیم :

$$\text{Log}_{10} 20 = 1,30103$$

1,30103 را لوگاریتم عدد 20 و عدد 20 را انتی لوگاریتم 1,30103 می نامند .

باین قسم هر عدد انتی لوگاریتم . لوگاریتم خود میباشد .

طور مثال اول $\text{Log}\, N = 4,38686$

$N = 24370$ که ازجدول لوگاریتم بمقابل 4, 38686 دریافت شد انتی لوگاریتم 4, 38686 نامیده میشود .

در اینجا لوگاریتم یک عدد معلوم است خود عدد را بنام انتی لوگاریتم ، لوگاریتم داده شده دریافت می نمائیم .

مثال دوم : $\text{Log}\, N = 4,38686$ داده شده است

N یا انتی لوگاریتم 4, 38686 را دریافت کنید ؟

حل : درجدول لوگاریتم بمقابل مانتیس 38686 . عدد 24370 واقع شده است.
چون کرکترستیک 4 است لهذا باید عدد مذکور پنج رقمی یعنی 24370 باشد لهذا

$\log_{10} 24370 = 4,38686$ یا $N = 24370$

مثال سوم : $\log_{10} N = 8,09202 - 10$

N یا انتی لوگاریتم ، لوگاریتم داده شده را دریافت نمائید ؟

حل : بمقابل مانتیس 0,09202 عدد 123 درستون 6 تقابل میکند . بناءً عدد آن 1236 میباشد . ازانیکه کرکترستیک 2- بناءً عدد مذکور $N = 0,01236$ میباشد.

که $\log 0,01236 = 8,09202 - 10$

مثال سوم : رابطه $\log_{10} N = 7,38591 - 10$ داده شده است . N را دریافت کنید ؟

حل : مانتیس لوگاریتم $.38578 = 24310$ (ازجدول لوگاریتم گرفته شده است)

مانتیس لوگاریتم $.38591 = N$

مانتیس لوگاریتم $.38596 = 24320$

فرق دو عدد اولی وسومی = 10

فرق مانتیس های اولی وسومی = 18

فرق مانتیس اولی ودومی = 13

18	10
13	x

$$x = \frac{13 \cdot 10}{18} = 7\frac{2}{9} \approx 7$$

$\therefore N = 0,0024317$

مثال چهارم : $\log N = 1,52255$ داده شده است . N را دریافت کنید ؟

حل : مانتیس لوگاریتم $.52244 = 33300$

مانتیس لوگاریتم $.52257 = 33310$

فرق جدول 13 و فرق عدد 10 و فرق مانتیس (244 - 255) مساوی به 11 است .

10	13
x	11

$$x = \frac{11 \cdot 10}{13} = \frac{110}{13} = 8\frac{6}{13} \approx 8$$

عدد 8 را با 33300 جمع میکنیم مساوی به 33308 میشود چون کرکترستیک 1 است بناءً N = 33, 308 میباشد .

تمرینات : لوگاریتم اعداد ذیل را دریافت کنید ؟

1_ $\log_{10} 71830$

2_ $\log_{10} 377,5$

3_ $\log_{10} 4,259$

4_ $\log_{10} 0,0008811$

5_ $\log_{10} 11,73$

لوگاریتم عدد داده شده است ، عدد مذکور را دریافت کنید ؟

6_ $\log N = 5,88400$

7_ $\log N = 5,67706 - 10$

8_ $\log N = 1,83835$

9_ $\log N = 3,00732$

10_ $\log N = 6,43377$

انتی لوگاریتم معادلات ذیل را دریافت کنید ؟

11_ $\log_2 N = 3$, 12_ $\log_{10} N = 2$, 13_ $\log_4 N = 2$

14_ $\log N_3 = 27$, 15_ $\log_{10} N = -1$, 16_ $\log_3 N = 3$

17- $\text{Log}_4 N = 3$, 18- $\text{Log}_{10} N = 0{,}001$, 19- $\text{Log}_2 N = 5$

20- $\text{Log}_{10}\sqrt{45} = \cdots\cdots + \text{Log}_{10}\sqrt{5}$

ترتیب جدول لوگاریتم :

بمنظور بدست آوردن مانتیس لوگاریتم اعداد از سلسله ٔ ذیل استفاده مینمائیم :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots\cdots \quad (i)$$

هرگاه x را به x- عوض کنیم :

$$-\ln(1-x) = \mp x - \frac{x^2}{2} \mp \frac{x^3}{3} \mp \frac{x^4}{4} \mp \frac{x^5}{5} + \cdots\cdots \quad (ii)$$

معادله (ii) را از معادله (i) تفریق میکنیم :

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \cdots\cdots$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\cdots\right)$$

اکنون $x = \frac{1}{2n+1}$ وضع میکنیم :

$$\ln\frac{n+1}{n} = 2\left\{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \frac{1}{7(2n+1)^7} + \cdots\right\}$$

اکنون اگر $n = 1$ شود $\ln 2$ بدست میآید :

$$\ln 2 = 2\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3(3)^3} + \frac{1}{5(3)^5} + \frac{1}{7(3)^7} + \cdots\cdots\right\}$$

$$\ln 2 = 2\left\{\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9} \cdots\cdots\right\}$$

$\ln 2 = 0{,}693147180$ تا 9 رقم صحت دارد .

اکنون ln 2 را به لوگاریتم قاعدهٔ 10 تبدیل مینمائیم :

$$\log_{10} N = M \ln N$$

$$M = 0,434294$$

$$\log_{10} 2 = 0,434294 \times 0,693147 = 0,30103$$

به همین قسم اگر n=2 قرارداده شود ln 3 بدست میآید :

$$\ln 3 = \ln 2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} + \frac{1}{7\cdot 5^7} + \frac{1}{9\cdot 5^9} + \cdots\cdots\right).$$

$$\ln 3 = 1,0986122$$

$$\log_{10} 3 = 1,0986122 \times 0,434294 = \cdot 47712$$

برای دریافت $\log_{10} 4$ از $\log_{10} 2$ استفاده مینمائیم :

$$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2\log_{10} 2$$

$$\log_{10} 4 = 2 \times 0,30103 = 0,60206$$

همچنان اگر n = 4 وضع شود از فارمول عمومی فوق ln 5 را بدست میآوریم :

$$\ln \frac{4+1}{4} = 2\left\{\frac{1}{9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \frac{1}{7\cdot 9^7} + \frac{1}{9\cdot 9^9} + \cdots\cdots\right\}$$

$$\ln 5 - 2\ln 2 = 2\left\{\frac{1}{9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \frac{1}{7\cdot 9^7} + \frac{1}{9\cdot 9^9} + \cdots\cdots\right\}$$

$$\ln 5 = 2\ln 2 + 2\left\{\frac{1}{9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \frac{1}{7\cdot 9^7} + \frac{1}{9\cdot 9^9} + \cdots\cdots\right\}$$

$$2\ln 2 = 2 \cdot 0,693147180 = 1,386294360$$

$$\ln 5 = 1,386294360 + 2\left\{0,11156\right\} = 1,386294360 + 0,22312$$

$$\ln 5 = 1,609414360$$

$$\log_{10} N = M \ln N$$

$$\log_{10} 5 = 0,434294 \times 1,609414360$$

$Log_{10}5 = 0,69896676$

اکنون مانتیس لوگاریتم 6 رابقرارذیل دریافت مینمائیم :

$$Log_{10}6 = Log_6(2\cdot 3) = Log_{10}2 + Log_{10}3 = 0,30103 + 0,47712$$

$$Log_{10}6 = 0,77813 \approx 0,77815$$

اکنون مانتیس لوگاریتم 7 رادریافت مینمائیم : $n = 6$ قرارمیدهیم .

$$\ln\frac{6+1}{6} = 2\left\{\frac{1}{13} + \frac{1}{3\cdot 13^3} + \frac{1}{5\cdot 13^5} + \frac{1}{7\cdot 13^7} + \cdots\right\}$$

$$\ln 7 = \ln 6 + 2\left\{\frac{1}{13} + \frac{1}{3\cdot 13^3} + \frac{1}{5\cdot 13^5} + \frac{1}{7\cdot 13^7} + \cdots\right\}$$

بعدازمحاسبه $Log_{10}7 = 0,84510$

اکنون مانتیس لوگاریتم 8 رادریافت مینمائیم :

$$Log_{10}8 = Log_{10}2^3 = 3Log_{10}2 = 3\times 0,30103 \quad 0,90309$$

$Log_{10}9$ رادریافت مینمائیم :

$$Log_{10}9 = Log_{10}3^2 = 2Log_{10}3 = 2\times 0,47712 = 0,95424$$

$$Log_{10}10 = Log_{10}(2\cdot 5) = Log_{10}2 + Log_{10}5 = \cdot 30103 + \cdot 69897 \quad 1$$

$$Log_{10}10 = 1$$

اکنون لوگاریتم 11 رادریافت مینمائیم :

$n = 10$ قرارمیدهیم .

$$\ln\frac{n+1}{n} = 2\left\{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(m+\ )^5} + \frac{1}{7(2n+1)^7} + \cdots\right\}$$

$$\ln\frac{10+1}{10} = 2\left\{\frac{1}{21} + \frac{1}{3\cdot 21^3} + \frac{1}{5\cdot 21^5} + \frac{1}{7(2n+1)^7} + \cdots\right\}$$

$$\ln\frac{11}{10} = 2\left\{\frac{1}{21}+\frac{1}{3\cdot 21^3}+\frac{1}{5\cdot 21^5}+\frac{1}{7\cdot 21^7}+\cdots\cdots\right\}$$

$$\ln 11 = \ln 10 + 2\left\{\frac{1}{21}+\frac{1}{3\cdot 21^3}+\frac{1}{5\cdot 21^5}+\frac{1}{7\cdot 21^7}+\cdots\cdots\right\}$$

$$\ln 11 = \ln(2\cdot 5)+2\left\{\frac{1}{21}+\frac{1}{3\cdot 21^3}+\frac{1}{5\cdot 21^5}+\frac{1}{7\cdot 21^7}+\cdots\cdots\right\}$$

$$\ln 11 = \ln 2 + \ln 5 + 2\left\{\frac{1}{21}+\frac{1}{3\cdot 21^3}+\frac{1}{5\cdot 21^5}+\frac{1}{7\cdot 21^7}+\cdots\cdots\right\}$$

$$\ln 11 = 0,693147180 + 1,609414360 + 2\left\{\frac{1}{21}+\frac{1}{3\cdot 21^3}+\frac{1}{5\cdot 21^5}+\frac{1}{7\cdot 21^7}+\cdots\cdots\right\}$$

$$\ln 11 = 2\cdot 30256 + 2\left\{\frac{1}{21}+\frac{1}{3\cdot 21^3}+\frac{1}{5\cdot 21^5}+\frac{1}{7\cdot 21^7}+\cdots\cdots\right\}$$

بعد از محاسبه لوگاریتم 11 را چنین می یابیم :

$$\log_{10} 11 = 1\cdot 04139$$

ثبوت : هرگاه $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ را بالای دو زاویه α و β تطبیق نمائیم ، $\tan(\alpha-\beta)$ بدست میآید شاگردان ثبوت نمایند .

مثال اول : نسبت های مثلثاتی 75° را دریافت مینمائیم :

حل : میدانیم که :

$$75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$$

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ+45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ$$

$$\sin 75^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4}$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ+30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{4}$$

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ+30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ}$$

$$\tan(45^\circ+30^\circ) = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}$$

$$\tan 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

مثال دوم : نسبت های مثلثاتی 15° را دریافت نمائید .

حل : چون $15^\circ = (45^\circ - 30^\circ)$ پس داریم که :

1 : $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$

$$\sin(45^\circ-30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

به همین قسم میتوانیم مانتیس لوگاریتم اعداد بزرگتر از 11 را بدست آورده و جدول لوگاریتم را ترتیب بدهیم. جدول ذیل نمونه کوچکی از جدول لوگاریتم است که نشان داده شده است .

N	Common Logarithm
1	0,0000
2	0,30103
3	0,47712
4	0,60206
5	0,69896
6	0,77815
7	0,84510
8	0,90309
9	0,95424
10	1,0000
11	1,04139

ناگفته نماند که عدد 12 مرکب از 3.4 است ، لوگاریتم آن از حاصل جمع لوگاریتم های 3 و 4 بدست میآید . لوگاریتم 13 را در صورت n = 12 حساب میکنیم .

لوگاریتم 14 که مرکب از 2x7 است از حاصل جمع لوگاریتم های 2 و 7 بدست میآید .

15 - یک عدد مرکب از 5x3 است . لوگاریتم آن از حاصل ضرب لوگاریتم های 3 و 5 بدست می آید .

16 - یک عدد مرکب 2^4 است که لوگاریتم آن از چهار چند لوگاریتم 2 بدست میآید .

لوگاریتم 17 را به قیمت n = 16 توسط فارمول بدست میآوریم .

18 یک عدد مرکب از 9 x 2 است . لوگاریتم مساویست به حاصل جمع لوگاریتم های 2 و 9 که داده شده است .

لوگاریتم 19 را به قیمت n = 18 توسط فارمول بدست میآوریم .

20 یک عدد مرکب از 5 x 4 است . لوگاریتم آن مساوی به مجموع لوگاریتم های 4 و 5 است به این اساس لوگاریتم اعداد بزرگتر را بدست آورده میتوانیم .

لوگاریتم توابع مثلثاتی

درین مبحث لوگاریتم توابع مثلثاتی یعنی Log sin θ, Log cos θ, Log tan θ و Log cot θ , Log sec θ , Log csc θ رامطالعه مینمائیم .

لوگاریتم نسبت های مثلثاتی از دو قسمت یکی نسبت های مثلثاتی یک زاویه و دیگری لوگاریتم نسبت های مثلثاتی تشکیل شده است . درمحاسبه نسبت های مثلثاتی و لوگاریتم نسبت های مثلثاتی از انترپولیشن استفاده میشود .

جدول لوگاریتمی نسبت های مثلثاتی :

درین جدول مانتیس لوگاریتم نسبت های مثلثاتی تا 5 رقم کسر اعشاری از 0° تا 90° درانتروال $1'$ (یک دقیقه) محاسبه و در جدول به ترتیب داده شده درموقع ضرورت ازآن استفاده میشود . لوگاریتم نسبت های مثلثاتی یک زاویه را قرار ذیل مطالعه و توضیح مینمائیم :

ازجدول نسبت های مثلثاتی گرفته شده است .

$$\sin 41^\circ 40' = 0,6648$$

$$\text{Log}\sin 41^\circ 40' = \text{Log}\,0,6648$$

یا $\text{Log}\sin 41^\circ 40' = 9,82269 - 10$

لوگاریتم sine و cos زوایای حاده که کوچکتر از یک است منفی، tan یک زاویه بین صفر و 45° و cot یک زاویه بین 45° الی 90° دارای کرکترستیک منفی میباشند. استعمال کرکترستیک "10-" در جدول بمنظور مثبت ساختن مانتیس و متحد الشکل ساختن جدول مانتیس لوگاریتم است. طور مثال اگر در جدول لوگاریتمی $\log \tan 85^\circ 25'$ را 11,09601 می یابیم بمعنای این است که:

$$\log 85^\circ 25' = 11,09601 - 10 = 1,09601$$

از جدول لوگاریتمی مستقیماً لوگاریتم نسبت مثلثاتی یک زاویه را که قبلاً توسط ریاضی دانها محاسبه و آماده شده است، میگیریم و در محاسبه خود از آن استفاده مینمائیم. حرف d که در سرستون نوشته شده است، فرق جدولی لوگاریتمی نسبت مثلثاتی دو ساین و یا دو کوساین را میدهد. همچنان حرف cd فرق مشترک لوگاریتمی دو تانژانت و یا دو کوتانژانت را نشان میدهد.

جدول های کوچک طرف راست صفحه فرق جدولی 1, 2 . . . . 9 دقیقه را میدهد که محاسبه را چندین مرتبه آسان می سازد.

مثال اول: $\log \tan 73^\circ \; 14,7' = ?$

حل: $\log \tan 73^\circ \; 14' = 10,52103 - 10$

در ستون "cd" فرق مشترک بمقابل این زاویه 45 است.

فرق برای $\left(\frac{7}{10}\right)'$ عبارت است از: $\frac{7}{10} \cdot 45 = \frac{63}{2} = 31,5$

31 را بالوگاریتم نسبت مثلثاتی زاویه داده شده جمع میکنیم:

$$\log \tan 73^\circ 14' = 10,52103 - 10$$
$$+31$$

$$\log \tan 73^\circ \; 14,7' = 10,52134 - 10$$

$$\log \tan 73^\circ \; 14,7' = .52134$$

اگر در جدول ایکه برای فرق مشترک 45 ساخته شده بشماره 7 ببینیم عدد 31 را میدهد.

	45	44	43
1	4,5	4,4	4,3
2	9,0	8,8	8,6
3	13,5	13,2	12,9
4	18,0	17,6	17,2
5	22,5	22,0	21,5
6	27,0	26,4	25,8
7	31,5	30,8	30,1
8	36	35,2	34,4
9	40	39,6	38,7

مثال دوم: $\text{Log} \sin 37^\circ 41' 10''$ را دریافت کنید؟

$$\text{Log} \sin 37^\circ 41' = 9,78625 - 10$$

$$\text{Log} \sin 37^\circ 42' = 9,78642 - 10$$

فرق جدولی برای 1 دقیقه = 0,00017

فرق مشترک جدولی 17 را از ستون dc مقابل این زاویه نیز بدست آورده میتوانیم:

فرق برای $10''$ یا $\left(\frac{10}{60}\right)$:

$$\frac{10}{60} \cdot 17 = 2,8 \approx 3$$

عدد 3 را با نسبت مثلثاتی زاویه کوچک جمع میکنیم:

$$\text{Log}\sin 37^\circ 41' = 9,78625-10$$

$$\underline{\qquad\qquad 3 \qquad\qquad} \qquad 10''$$

$$\text{Log}\sin 37^\circ 41' \; 10'' = 9,78628$$

نوت : $\frac{10}{60}$ حصه فرق جدولی 17 عبارت از 3 است .

مثال سوم : Log cos 18° 36′ 20″ را دریافت نمائید ؟

نسبت مثلثاتی cos 18° 36′ 20″ دربین نسبت مثلثاتی Log cos 18° 36′

و Log cos 18° 37′ واقع میباشد یعنی :

$$\text{Log}\cos 18^\circ 36' = 9,\ 97670-10$$

$$\text{Log}\cos 18^\circ 37' = 9,\ 97666-10$$

$$,0000 4$$

فرق جدولی 4 است . فرق برای ($\frac{20}{60}$) یا برای $\frac{1}{3}$ دقیقه عبارت است از :

$$\frac{1}{3}\cdot 4 = \frac{4}{3} = 1\cdot 3 \approx 1$$

عدد 1 را از قیمت مانتیس لوگاریتمی : 9, 97670 - 10 تفریق میکنیم .

$$9,\ 97670-10$$

$$-1$$

$$\text{Log}\cos 18^\circ 36' \; 20'' = 9,\ 97669-10$$

مثال چهارم :

$$\text{Log}\sin 51^\circ \; 23' \; 06''$$

حل :

$$\text{Log}\sin 51^\circ \; 23' = 9,\ 89284-10$$

$$\text{Log}\sin 51^\circ \; 24' = 9,\ 89294-10$$

فرق نسبت های مثلثاتی یا فرق جدولی برای 1 دقیقه 0,00010 است که درین صفحه به عدد 10 نشان داده شده است .

فرق برای $1' = 10$

فرق برای $(\frac{6}{60})' = 1 = 10 \cdot \frac{6}{60}$

1 را بارقم اخیر اعشاری زاویه کوچک جمع میکنیم :

$$\text{Log} \sin 51^\circ\ 23'\ 06'' = 9,89285 - 10$$

مثال پنجم : $\text{Log} \tan 64^\circ\ 25'\ 09''$ را دریافت نمائید؟

حل :

$$\text{Log} \tan 64^\circ\ 25' = 10,31988$$

$$\text{Log} \tan 64^\circ\ 26' = 10,32020$$

$$1' \qquad ,00032$$

فرق جدولی 0,00032 میباشد که درجدول ها ی مقابل این اعداد به 32 نشان داده شده است .

فرق برای $1' = 32$

فرق برای $(\frac{9}{60}) = \overset{8}{\cancel{32}} \cdot \frac{9}{\underset{15}{\cancel{60}}} = \frac{72}{15} = 4,8 \approx 5$

عدد 5 را بارقم اخیر اعشاری زاویه کوچک جمع میکنیم

$$\text{Log} \tan 64^\circ\ 25'\ 09'' = 10,31993 - 10$$
$$= 0,31993$$

مثال ششم :

$$\text{Log} \sin 57^\circ\ 00'\ 30'' = \ ?$$

حل :

$$\text{Log} \sin 57^\circ\ 00' = 9,92359 - 10$$

$$\text{Log} \sin 57^\circ\ 1' = 9,92367 - 10$$

فرق جدولی برای $1'$ $,00008$

این فرق درجدول به 8 نشان داده شده است .

فرق برای $1' = 8$

فرق برای $30'' = \frac{30}{60} \cdot 8 = 4$

عدد 4 را بارقم اخیر کسر اعشاری $9,92359-10$ جمع میکنیم .

$\therefore \quad \text{Log}\sin 57^\circ\ 30'' = 9,92363-10$

مثال هفتم :

$\text{Log}\sin 22^\circ\ 34' = 9,58406-10$

$\text{Log}\sin 22^\circ\ 34,8' = 9,58430-10$

قیمت های فوق داده شده اند . باساس رابطه اولی رابطه دومی را تحقیق و امتحان نمائید ؟

$\text{Log}\sin 22^\circ\ 34' = 9,58406-10$

$\text{Log}\sin 22^\circ\ 35' = 9,58436-10$

فرق جدولی $=$ $0,00030$ برای $1'$

فرق برای $0,8 = 0,00024 = 0,8 \times 0,00030$

$\text{Log}\sin 22^\circ\ 34' = 9,58406-10$

$+\ 0,00024$

$\text{Log}\sin 22^\circ\ 34,8' = 9,58430-10$ تحقیق شد .

هرگاه بخواهیم عملیه راسهل و آسان بسازیم چنین عمل مینمائیم :

$\text{Log}\sin 22^\circ\ 34,8' = 9,58406-10+0,8\times 30 = 9,58406+24$

$= 9,58430-10$

24 با رقم اخیر اعشاری جمع شود.

مثال هشتم: تحقیق نمائید ؟ $\text{Log} \cos 66^\circ \; 42{,}4' = 9{,}59708$

$$\text{Log} \cos 66^\circ \; 42' = 9{,}59720 - 10$$

فرق جدولی 30 است . (درجدول مثلثاتی دیده شده است)

$$\text{Log} \cos 66^\circ \; 42{,} \; 4' = 9{,}59720 - 10 + 0{,}4 \times 30$$

$$\text{Log} \cos 66^\circ \; 42'{,} \; 4 = 9{,} \; 59720 - 10 - 12 = 9{,} \; 59708 - 10$$

مثال نهم : تحقیق نمائید :

(a) $\text{Log} \sin A = 9{,} \; 66197 - 10$ $\quad A = 27^\circ \; 20'$

(b) $\text{Log} \cot A = 0{,} \; 15262$ $\quad A = 35^\circ \; 8'$

(c) $\text{Log} \sin A = 9{,} \; 95472 - 10$ $\quad A = 64^\circ \; 17{,} \; 3'$

حل : جزء (c) راحل نمائیم :

$$\text{Log} \sin 64^\circ \; 17' = 9{,}95472 - 10$$

$$\text{Log} \sin 64^\circ \; 18' = 9{,}95476 - 10$$

فرق جدولی برای $1'$ $\quad = \quad 0{,}00006 \quad 1'$

$$\text{Log} \sin 64^\circ \; 17' = 9{,} \; 95470 \; - 10$$

$$\text{Log} \sin A \quad = 9{,} \; 95472 \; - 10$$

فرق . . . . $,00002$

فرق نسبت های مثلثاتی	فرق زاویه
0, 00006	1
0, 00002	x

$$x = \frac{0{,}00002}{0{,}00006} = \frac{1}{3} = 0{,}3 \quad \therefore A = 64 \quad 17{,} \; 3$$

مثال دهم :

تحقیق نمائید $\text{Log} \cos A = 9{,}97888-10$, then $\hat{A} = 17^\circ\ 43{,}5'$

$\text{Log} \cos\ 17^\circ\ 44' = 9{,}97886-10$

فرق جدولی 4 داده شده است فرق لوگاریتمی دو نسبت مثلثاتی فوق 2 است .

فرق زاویه	فرق نسبت مثلثاتی
1	4
x	2

$x = \frac{2}{4} = {,}5'$ $\Rightarrow \therefore A = 17^\circ\ 43{,}5'$ تحقیق شد

مثال یازدهم :

(e) $\text{Log} \tan\ A = 0{,}24372$ $A = 60^\circ\ 17{,}\ 6'$ تحقیق نمائید ؟

$\text{Log}\ \tan 60^\circ\ 17' = 0{,}\ 24353$, فرق جدولی 30

فرق دو نسبت مثلثاتی 19

زاویه کسری مطلوبه $= \frac{19}{30}\ (1)' = 0{,}6'$ $\therefore\ \hat{A}\ \ 60^\circ\ 17{,}\ 6'$

مثال دوازدهم :

(f) $\text{Log} \tan A = 9{,}41640-10$, $A = 75^\circ\ 22{,}8'$ تحقیق نمائید ؟

$\text{Log} \cot\ 75^\circ\ 23' = 9{,}\ 41629-10$

فرق جدولی $= 52$ و فرق های نسبت های مثلثاتی فوق 11

زاویه کسری مطلوبه $= \frac{11}{52}\ (1'\ ) = {\cdot}2'$:

درکوتانجانت زاویه را منفی میکنیم :

$\therefore\ \hat{A} = 75^\circ\ 22{,}8'$ $(23' - 0{,}2')$

تمرین :

۱ ـ هریک از مثال های داده شده ذیل را تحقیق وحل نمائید ؟

(a) $\log \sin 14^\circ\ 28{,}3' = 9{,}39777 - 10$ $\quad$ $(39762 + {,}3 \times 39)$

(b) $\log \cos 66^\circ\ 44{,}8' = 9{,}59638 - 10$ $\quad$ $(59661 - {,}8 \times 29)$

(c) $\log \tan 31^\circ\ 26{,}4' = 9{,}78630 - 10$ $\quad$ $(78618 + {,}4 \times 29)$

(d) $\log \cot 45^\circ\ 54{,}6' = 9{,}98620 - 10$ $\quad$ $(98635 - {,}6 \times 25)$

(e) $\log \sin 62^\circ\ 29{,}1' = 9{,}94787 - 10$ $\quad$ $(94786 + {,}1 \times 7)$

(f) $\log \cos 23^\circ\ 33{,}7' = 9{,}96220 - 10$ $\quad$ $(96223 - {,}7 \times 5)$

(g) $\log \tan 70^\circ\ 20{,}6' = 0{,}44709$ $\quad$ $(44685 + {,}6 \times 40)$

(h) $\log \cot 11^\circ\ 17{,}3' = 0{,}69982$ $\quad$ $(70002 - {,}3 \times 66)$

۲ ـ تحقیق نمائید ؟

(a) $\log \sin A = 9{,}90020 - 10$ $\quad$ $A = 52^\circ\ 37{,}6'$ $\quad$ $\left(\frac{6}{10} \times 1' = {,}6'\right)$

(b) $\log \cos A = 9{,}93602 - 10$ $\quad$ $A = 36^\circ\ 20{,}6'$ $\quad$ $\left(\frac{3}{7} \times 1' = 0{,}4'\right)$

(c) $\log \tan A = 9{,}87150 - 10$ $\quad$ $A = 36^\circ\ 38{,}7'$ $\quad$ $\left(\frac{18}{26} \times 1' = 0{,}7'\right)$

(d) $\log \sin A = 0{,}01245$ $\quad$ $A = 44^\circ\ 10{,}7'$ $\quad$ $\left(\frac{7}{25} \times 1' = 0{,}3'\right)$

(e) $\log \sin A = 9{,}80172 - 10$ $\quad$ $A = 39^\circ\ 18{,}4'$ $\quad$ $\left(\frac{6}{16} \times 1' = 0{,}4'\right)$

(f) $\log \cos A = 9{,}55215 - 10$ $\quad$ $A = 69^\circ\ 6{,}6'$ $\quad$ $\left(\frac{13}{33} \times 1' = {,}4'\right)$

(g) $\log \tan A = 0{,}44372$ $\quad$ $A = 70^\circ\ 12{,}1'$ $\quad$ $\left(\frac{5}{40} \times 1' = {,}1'\right)$

(h) $\log \cot A = 9{,}31142 - 10$ $\quad$ $A = 78^\circ\ 25{,}4'$ $\quad$ $\left(\frac{38}{64} \times 1' = {,}6'\right)$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

مثال سوم: تحقیق نمائید که $\sin 105^\circ + \cos 105^\circ = \cos 45^\circ$ ...... :

حل: .... $\sin 105^\circ + \cos 105^\circ = \sin(45^\circ + 60^\circ) + \cos(45^\circ + 60^\circ)$

$$\sin(45^\circ + 60^\circ) + \cos(45^\circ + 60^\circ) = \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ +$$

$$\cos 45^\circ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ$$

$$= \cos 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ + \cos 45^\circ \cos 60^\circ -$$

$$\cos 45^\circ \sin 60^\circ$$

$$= 2\cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \cos 45^\circ \cdot \frac{1}{2} = \cos 45^\circ$$

مقدمه

دیپارتمنت تربیهٔ معلم وکتب درسی مؤسسهٔ خیریه I.R.C مدتیست ازنگاه بشردوستی جهت ارتقای سویهٔ تعلیمی وتربیوی شاگردان مهاجر درتهیه و تألیف کتب درسی ساینس وریاضی اقدام نموده وخوشبختانه تاامروز اکثر کتب ساینس ازقبیل الجبر، هندسه ، فزیک ، کیمیا وبیولوژی ازصنف هفت (۷) الی دوازدهم (۱۲) رابشکل احسن آن تهیه وتألیف نموده اند که طور مجانی بدسترس شاگردان مهاجر افغان قرارگرفته است که ازآن بصورت اعظمی استفاده نموده اند .

بسلسله خدمات کارکنان شعبهٔ (T.T.T.) اینجانب نوشتن مثلثات صنف (۱۲) را وظیفتاً بعهده گرفته وآن رادرهفت فصل مطابق مفردات ترتیب وتألیف نموده ام درین کتاب قضایا بشکل ساده آن اثبات ومثالهای زیادی حل وتمرینات بصورت کافی داده شده است . علاوتاً طریق ساختن جدول مانتیس لوگاریتم تشریح وتوضیح شده است که شاگردان بکمک استادان میتوانند جدول لوگاریتم راترتیب نمایند .

از استادان محترم شیراحمدخان عضو مرکز تربیهٔ معلم وکتب درسی I.R.C راحل صاحب استاد لیسهٔ I.R.C شاه محمدخان عضو نصاب مرکز تعلیمی که دراصلاح این کتاب همکاری نموده اند صمیمانه ممنون وسپاسگذارم همچنان ازغلام سخی "احمدزی" وفریدون "نوری" که درخطاطی ورسامی اشکال این کتاب بامن همکاری نموده اند تشکر مینمایم . درخاتمه ازتمام استادان وخوانندگان محترم خواهشمندم که مارادراصلاح ورفع نقایص این کتاب یاری نموده نظریات سودمند ومفیدشان رادرین باره برای مابفرستند بااحترام

رحیم الله

فهرست

عنوان — صفحه

فهرست

عنوان **صفحه**

فهرست

عنوان **صفحه**

فصل اول

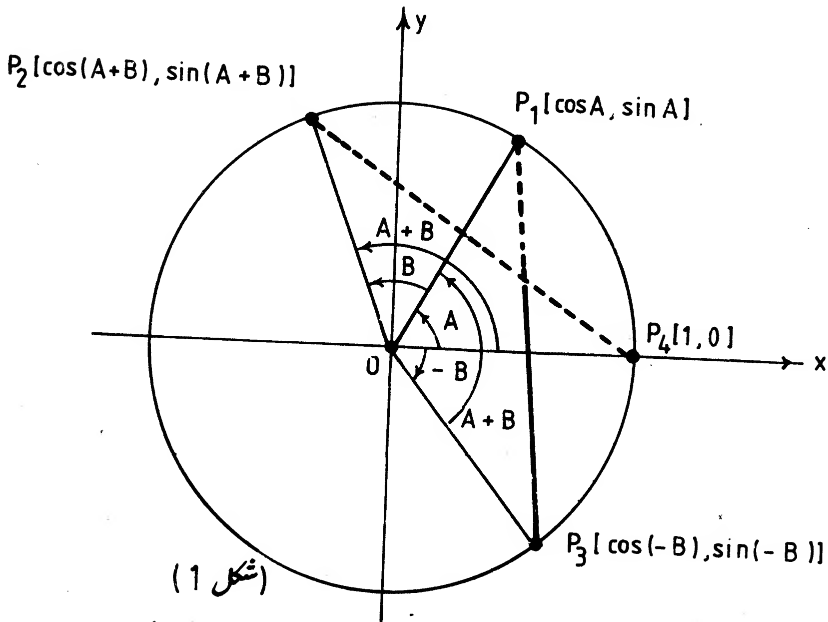
نسبت های مثلثاتی مجموعه وتفاضل دوزاویه A و B :

قضیه : cosine مجموعه دوزاویه A و B عبارت است از :

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

بروی دایرهٔ مثلثاتی (O , R) که مرکز آن مبدء محور های کمیات وضعیهٔ xOy است،

زوایای A ، A+B و B - رانشان میدهیم .



(شکل 1)

اضلاع این زوایا دایره را به نقاط P_1 ، P_2 ، P_3 و P_4 قطع مینمایند .

میتوانیم $P_1(x_1, y_1)$ وهم دیگر نقاط را ازجنس ساین وکوساین زوایا بنویسیم

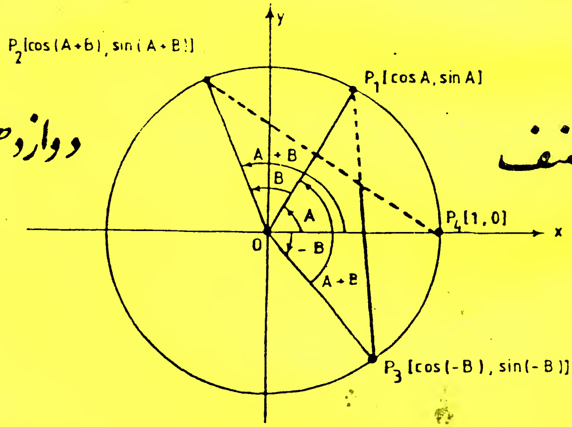
طوریکه:

$$\cos A = \frac{x_1}{1} = x_1 \ , \ \sin A = \frac{y_1}{1} = y_1$$

$$\therefore P_1(x_1, y_1) = P_1(\cos A, \sin A)$$

مثلثات

برای



صنف دوازدهم

مؤلف: رحیم الله

پشاور
سرطان ۱۳۷۰

رحیم الله

مثلثات

برای صنف دوازدهم

تعلیمات ساینس و تکنالوژی

آی ، آر ، سی

پشاور

۱۳۷۰

RAHIMULLAH

TRIGONOMETRY

for 12 th Grade

INTERNATIONAL RESCUE COMMITTEE

Science & Technology Training for Afghans

S.T.T. Publication

July 1991

PESHAWAR

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ ط

این نشریه مخصوص متعلمان مهاجر سربکف راه آزادی افغانستان عزیز بوده و طور رایگان به دسترس
شان قرار می گیرد خرید و فروش آن ممنوع است . حق چاپ مربوط مرکز انکشافی تعلیم و تربیه افغانها بوده و
چاپ آن به اجازهٔ مرکز مذکور صورت خواهد گرفت .

پیشگفتار

مدت چندسال میشود که موسسه خیریه I.R.C خدمات صحی را برای مهاجرین افغان در پاکستان انجام میدهد بنا بر نیازمندی های روزافزون تعلیم و تربیه تنظیم های جهادی و موسسات مختلف خیریه و حکومت پاکستان سعی ورزیده اند تا به شیمول یک سلسله خدمات مثمر تعلیم و تربیه را برای اولاد معصوم مهاجرین و مجاهدین افغان عهده دار شوند. موسسهٔ خیریهٔ I.R.C نیز به نوبهٔ خود در اوایل ۱۹۸۵ تصمیم گرفت تا در پهلوی خدمات صحی خدمات لازم تعلیم و تربیه را بخاطر ارتقاً سطح دانش اولاد مهاجرین و مجاهدین افغان تقدیم دارد بعداز انجام یک سلسله تحقیقات و مشوره ها با دانشوران و استادان افغانی چنین نتیجه بدست آمد که بمیان آوردن یک مرکز تعلیمی و تربیوی برای استادان لیسه ها و مکاتب متوسطه و تحریر کتب درسی برای صنوف هفتم و بالاتر از آن اشد ضرورت میباشد

هدف این موسسه عبارت از کمک به اولاد افغان بدون در نظر داشت هر نوع تبعیض بوده موسسه سعی میورزد تا پالیسی بیطرفانهٔ خود را در مسایل سیاسی و تنظیمی حفظ کرده بصورت مساویانه مصدر خدمات برای تمام تنظیم ها و مهاجرین افغان گردد.

در پهلوی مشکلات دیگر تعلیمی عدم موجودیت کتاب های درسی خاصتاً در صنوف عالی یکی از پرابلم های عمده بوده که دامنگیر مکاتب مهاجرین افغان میباشد. چون موسسه در بخش مضامین ساینس و ریاضی استادان ورزیده و تسهیلات لازم داشته لذا تصمیم اتخاذ گردید تا کتاب های ریاضی و ساینس را برای صنوف هفتم و بالاتر از آن با در نظر داشت شرایط حساس جهادی و زندگی مهاجرین تحت رهنمائی های دین مقدس اسلام و حفظ احساسات اصیل کلتور افغانی تحریر کرده و بعداز ارزیابی و اصلاحات لازم ذریعهٔ استادان لیسه های مختلف و دانشوران افغانی و کمشنری افغان کتاب ها چاپ شده و بطور رایگان به دسترس متعلمین و استادان مکاتب مهاجرین از طریق موسسات مربوطهٔ آنها گذاشته شود

امیدست که خوانندگان محترم از روی همکاری نظریات مفید و ثمربخش شان را به موسسه تعلیم و تربیه آی. آر. سی اطلاع دهند به امید موفقیت و همکاری های بیشترتان.

و من الله التوفیق

اداره